

# 2025

## Banque CCINP — MP — MPI

### Table des matières

2025	Banque CCINP — MP — MPI	1
I	Analyse : exercices 1 à 58	2
II	Algèbre : exercices 59 à 94	44
III	Probabilités : exercices 95 à 112	62

#### LIENS DIRECTS VERS LES EXERCICES

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112							



# ANALYSE : EXERCICES 1 À 58

## Exercice 1 : Analyse

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$  et  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

1. Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont-elles équivalentes? Justifier.

2. Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

(a) Soit  $u: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto f(0) \end{cases}$  Prouver que  $u$  est une application continue sur  $E$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ . Prouver que  $F$  est une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

3. Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Soit  $c: \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$  On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\|f_n - c\|_1$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ . On note  $\bar{F}$  l'adhérence de  $F$ .

Prouver que  $c \in \bar{F}$ .  $F$  est-elle une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ ?

1. Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n: x \mapsto x^n$ . Alors  $\|f_n\|_\infty = 1$  et  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On ne peut donc pas avoir de  $\alpha > 0$  tel que  $\|\cdot\|_\infty \leq \alpha \|\cdot\|_1$  : les normes ne sont pas équivalentes.

2. (a) Le morphisme d'évaluation  $u$  est linéaire sur  $E$ .

De plus, si  $f \in E, |u(f)| = |f(0)| \leq 1 \times \|f\|_\infty$  donc  $u$  est une application continue sur  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .

(b) On remarque que  $F = u^{-1}(\{0\})$  avec  $u$  continue sur  $E$  et  $\{0\}$  ouvert de  $\mathbb{R}$ , donc  $F$  est fermé pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

On peut aussi prendre  $(f_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions nulles en 0 convergeant uniformément vers une fonction  $f \in E$ . Comme la convergence uniforme entraîne la convergence simple, on a alors  $f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0)$  donc  $f(0) = 0$  ce qui indique que  $f \in F$ . Par caractérisation séquentielle,

$F$  est un fermé de  $(E, \|\cdot\|_\infty)$ .

3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\|f_n - c\|_1 = \int_0^{1/n} |nt - 1| dt + \int_{1/n}^1 |1 - 1| dt = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \left[ \frac{(1 - nt)^2}{-2n} \right]_0^{1/n}$$

donc  $\|f_n - c\|_1 = \frac{1}{2n}$ .

(b) D'après la question précédente,  $\|f_n - c\|_1 \rightarrow 0$  donc  $c$  est limite de la suite  $(f_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Par caractérisation séquentielle de l'adhérence,  $c \in \bar{F}$ .

Mais  $c(1) \neq 0$  donc  $c \notin F$  et  $F \subsetneq \bar{F}$  donc  $F$  n'est pas fermée pour  $\|\cdot\|_1$ .

**Exercice 2 : Analyse**

On pose  $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$ .

1. Décomposer  $f(x)$  en éléments simples.
2. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur un intervalle du type  $]-r, r[$  (où  $r > 0$ ).  
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité  $D$  de ce développement en série entière.
3. (a) Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon  $R > 0$ .  
On pose, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .  
Exprimer, pour tout entier  $p$ , en le prouvant,  $a_p$  en fonction de  $g^{(p)}(0)$ .  
(b) En déduire le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve  $f(x) = \frac{3}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$ .

2. D'après le cours,  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  et  $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$  sont développables en série entière à l'origine.

De plus, on a  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$  et  $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$  (obtenu par dérivation du développement précédent). On en déduit que  $f$  est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière. Et

$$\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + 4 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.$$

C'est-à-dire  $\forall x \in ]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4n+7) x^n$ .

Notons  $D$  le domaine de validité du développement en série entière de  $f$ . D'après ce qui précède,  $]-1, 1[ \subset D$ . Notons  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$ . D'après ce qui précède  $R \geq 1$ .

Posons, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = (-1)^n (4n+7)$ .

Pour  $x = 1$  et  $x = -1$ ,  $|a_n x^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$  diverge grossièrement et ainsi  $R \leq 1$ ,  $1 \notin D$  et  $-1 \notin D$ .

On en déduit que  $D = ]-1, 1[$ .

3. (a) Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon  $R > 0$ . On pose, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .  
D'après le cours,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]-R, R[$ , et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-R, R[, g^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Ainsi, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $g^{(p)}(0) = p! a_p$  (tous les termes pour  $n > p$  sont nuls). C'est-à-dire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$a_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}.$$

- (b)  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $]-1, 1[$ . Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{p=0}^3 \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + o(x^3)$$

Or, d'après les questions précédentes, pour tout entier  $p$ ,  $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} = (-1)^p (4p+7)$ .

Ainsi, au voisinage de 0,  $f(x) = \sum_{p=0}^3 (-1)^p (4p+7) x^p + o(x^3) = f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$ .

**Exercice 3 : Analyse**

1. On pose  $g(x) = e^{2x}$  et  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ . Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $g$  et  $h$  sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ . En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée  $n^{\text{e}}$  d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , la valeur de  $f^{(n)}(x)$ .
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

1.  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On prouve, par récurrence, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

2.  $g$  et  $h$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  donc, d'après la formule de Leibniz,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)! (1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons  $\mathcal{P}(n)$  la propriété « Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $n$  fois dérivables sur  $I$  alors,  $fg$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x). »$$

Prouvons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies (dérivée d'un produit).
- Soit  $n \geq 0$  tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $n+1$  fois dérivables sur  $I$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont, en particulier,  $n$  fois dérivables sur  $I$  et donc par hypothèse de récurrence la fonction  $fg$  l'est aussi avec  $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les fonctions  $f^{(n-k)}$  et  $g^{(k)}$  sont dérivables sur  $I$  donc par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction  $(fg)^{(n)}$  est encore dérivable sur  $I$ . Ainsi la fonction  $fg$  est  $(n+1)$  fois dérivable et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire  $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$  avec  $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$ .

Or, en utilisant la formule de Pascal, on a  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ .

On en déduit que  $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$ .

Donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie, ce qui établit la récurrence.

**Exercice 4 : Analyse**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ .

On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .

Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

3. Prouver que l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

**H1**  $f$  est continue sur  $[a, b]$

**H2**  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors  $\exists c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

1. On suppose que  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ .

Soit  $h \neq 0$  tel que  $x_0 + h \in [a, b]$ .

En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction  $f$ , entre  $x_0$  et  $x_0 + h$ , on peut affirmer qu'il existe  $c_h$  strictement compris entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  tel que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h.$$

Quand  $h \rightarrow 0$  (avec  $h \neq 0$ ), on a, par encadrement,  $c_h \rightarrow x_0$ . Donc

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c_h) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell.$$

On en déduit que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \ell$ .

3. La fonction  $g$  proposée dans l'indication est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$  par opérations.

$g$  est également dérivable en 0 si  $x \neq 0$ ,  $g(x) = x \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} = o(x)$  est un  $DL_1(0)$  de  $g$  donc  $g$  est dérivable en 0

et  $g'(0) = 0$ .

Autre argument possible :  $\frac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  car le sinus est borné.

Cependant,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

avec  $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  car le sinus est borné, mais  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en 0 car  $\cos\left(\frac{1}{(n\pi)^{-1}}\right) = (-1)^n$ .

Donc  $g'$  n'a pas de limite en 0.

**Exercice 5 : Analyse****Exercice 6 : Analyse****Exercice 7 : Analyse****Exercice 8 : Analyse****Exercice 9 : Analyse****Exercice 10 : Analyse**

On pose  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

2. Calculer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$ .

1. Pour  $x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^x$  : la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$  sur  $[0, 1]$ . On a

$$\forall x \in [0, 1], |f_n(x) - f(x)| = \left| (x^2 + 1) \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n+x} \right| \leq \frac{2e}{n} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

donc  $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{2e}{n} \rightarrow 0$  puis  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$  et donc

la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

2. **H1** Toutes les  $f_n$  sont continues sur  $[0, 1]$  ;

**H2**  $(f_n)$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$ .

On peut intervertir limite et intégrale :

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx.$$

En effectuant deux intégrations par parties, on trouve  $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3$ .

**Exercice 11 : Analyse****Exercice 12 : Analyse**

**Exercice 13 : Analyse**

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.  
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

4. On se place sur  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie pour tout polynôme  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  de  $E$  par :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|.$$

(a) Justifier que  $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X], \|P\|_1 = 1\}$  est une partie fermée et bornée de  $E$ .

(b) Calculer  $\|X^n - X^m\|_1$  pour  $m$  et  $n$  entiers naturels distincts.

$S(0,1)$  est-elle une partie compacte de  $E$ ? Justifier.

1. Une partie  $K$  de  $E$  est compacte si toute suite d'éléments de  $K$  a au moins une valeur d'adhérence dans  $K$ .
2. Soit  $K$  compacte et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $x \in E$ . Par compacité,  $(x_n)_n$  possède au moins une valeur d'adhérence dans  $K$ . Or, par extraction, cette valeur d'adhérence vaut nécessairement  $x$ , qui est donc dans  $K$ .

Par caractérisation séquentielle,  $K$  est fermée.

3. Supposons que  $K$  ne soit pas bornée.

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver  $x_n \in K$  tel que  $\|x_n\| \geq n$  (car  $K \not\subset B(0_E, n)$ ).

La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$  telle que  $\|x_n\| \rightarrow +\infty$  a une valeur d'adhérence dans  $K$  alors que  $(\|x_n\|)_n$  ne peut en avoir : c'est contradictoire.

C'est donc que  $K$  est bornée.

4. (a)  $S(0,1)$  est une partie fermée en tant qu'image réciproque du fermé  $\{1\}$  par l'application continue  $\|\cdot\|_1$  (elle est 1-lipschitzienne par inégalité triangulaire) et bornée car par définition, pour tout  $P \in S(0,1)$ ,  $\|P\|_1 = 1$ .
- (b) Si  $n \neq m$ ,  $\|X^n - X^m\|_1 = 2$ .

Supposons que la suite  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$  ait une valeur d'adhérence : on a  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(X^{\varphi(n)})_n$  converge pour  $\|\cdot\|_1$ . Mais alors  $X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} 0_E$ .

Or  $\varphi(n) < \varphi(n+1)$  donc  $\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\|_1 = 2 \neq 0$ , ce qui est contradictoire.

Ainsi,  $S(0,1)$  n'est pas une partie compacte de  $E$ .

**Exercice 14 : Analyse**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels donnés avec  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ , alors la suite  $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$ .

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

1.  $f_n - f$  est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Il suffit de l'appliquer à la suite des sommes partielles  $(S_n)$  dont la convergence uniforme en tant que suite de fonctions est équivalente à la convergence uniforme de la série de fonction  $\sum f_n$ . Par ailleurs, la continuité des fonctions  $f_n$  implique celle des sommes partielles  $S_n$ .

3. On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme :

**H1**  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

**H2** La série  $\sum x^n$  converge normalement et donc uniformément sur le segment  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  (si  $f_n : x \mapsto x^n$ , alors

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n} \text{ qui est un terme général de série géométrique convergente).}$$

On en déduit alors que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}.$$



**Exercice 15 : Analyse**

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Rappeler la définition de la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $X$ , puis celle de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $X$ .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , normalement convergente sur  $X$  est uniformément convergente sur  $X$ .
3. La série de fonctions  $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$  est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R \in \mathbb{R}_+^*$  ?

1. On dit que la série  $\sum f_n$  converge normalement sur  $X$  lorsque les  $f_n$  sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge.

On dit que la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $X$  lorsque la suite des sommes partielles  $(S_n) = \left( \sum_{k=0}^n f_k \right)$

converge uniformément, ce qui équivaut à la convergence uniforme de suite  $(R_n) = \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right)$  vers la fonction nulle.

2. En cas de convergence normale, on a, au moins à partir d'un certain rang, pour tout  $x \in X$ ,  $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$  donc convergence absolue de  $\sum f_n(x)$  et donc convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $X$ . On peut donc bien parler de reste.

Puis, par inégalité triangulaire, pour tout  $x \in X$ ,

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty,$$

le dernier terme ne dépendant pas de  $x$  et tendant vers 0 comme reste de série convergente, donc  $(R_n)_n$  converge uniformément vers 0 et donc  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $X$ .

3. On pose,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{n^2}{n!} \neq 0$ . Alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 0.$$

On en déduit, par critère de d'Alembert, que la série entière  $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$  a un rayon de convergence égal à  $+\infty$ . Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de  $\mathbb{C}$ . En particulier, d'après 2.,

cette série entière converge uniformément sur tout disque de centre 0 et de rayon  $R$ .

**Exercice 16 : Analyse**

On considère la série de fonctions de terme général  $f_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right].$$

1. Démontrer que  $S$  est définie sur  $[0, 1]$ .

2. On définit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par  $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

En utilisant  $S(1)$  montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

En déduire un équivalent simple de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

3. Démontrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et calculer  $S'(1)$ .

1. On a, pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $-f_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$  terme général positif de série convergente, donc, par comparaison,  $\sum f_n(x)$  converge. C'est aussi le cas pour  $x = 0$  car  $f_n(0) = 0$ . Donc  $S$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .

2. Comme

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n},$$

$u_n$  est la somme partielle d'ordre  $n$  de la série précédente pour  $x = 1$ , donc  $u_n \rightarrow S(1)$ .

Ainsi  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - u_n = \ln n + o(\ln n)$  et donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$ .

3. On utilise le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des séries de fonctions :

**H1**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$

**H2** D'après la question 1,  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$ .

**H3**  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$ . Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que  $\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$  qui est un terme général positif de série convergente.

Donc  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $[0, 1]$ .

On peut alors affirmer que la fonction  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et on a  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$ .

En vertu de ce qui précède,  $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1$  par télescopage. Donc  $S'(1) = -1$ .

**Exercice 17 : Analyse**

**Exercice 18 : Analyse**

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$ . On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

**1. Étudier la convergence simple de cette série.**

On note  $D$  l'ensemble des  $x$  où cette série converge et  $S(x)$  la somme de cette série pour  $x \in D$ .

**2. (a) La fonction  $S$  est-elle continue sur  $D$  ?**

**(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur  $D$ .**

**(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur  $[0, 1]$ .**

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence  $R = 1$ .

En  $x = 1$ , il y a convergence par le théorème spécial des séries alternées.

En  $x = -1$ , la série diverge (série harmonique).

On a donc  $D = ]-1, 1[$ .

2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1,  $S$  est continue sur  $] -1, 1[$ .

En  $x = 1$ , il s'agit de la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ , dont la convergence est assurée par le théorème spécial des séries alternées.

Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de  $S$  en 1, et donc finalement  $S$  est continue sur  $D$  entier.

(b)  $\forall x \in D, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$ , donc  $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in ]-1, 1[} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$  (atteint en  $x = 1$ ) et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  diverge.

Donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  ne converge pas normalement sur  $D$ .

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  ne converge pas uniformément sur  $D$  non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en  $-1$  et cela entraînerait la convergence de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , ce qui est absurde.

(c) On étudie la convergence uniforme sur  $[0, 1]$ .

Pour tout  $x \in [0, 1]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$  vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées :

$\left(\frac{x^n}{n}\right)$  décroît et tend vers 0. Cela permet de majorer son reste  $R_n$ . On a

$$\forall x \in [0, 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

Donc  $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ . Donc,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Bilan final** : En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur tout segment de  $] -1, 1[$  et converge uniformément sur tout segment de  $] -1, 1[$ .

**Exercice 19 : Analyse**

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.

Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série  $\sum a_n x^n$  et la série  $\sum n a_n x^n$  ont même rayon de convergence.

- (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :

$$x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}.$$

2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :  $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ .

- (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

- (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :

$$z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}.$$

1. (a) On applique le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  d'une série de fonctions :

**H1** les  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$ ;

**H2** la série de fonction converge simplement sur  $] -R, R[$ ;

**H3** la série des  $f'_n$  qui a même rayon de convergence converge uniformément sur tout segment de  $] -R, R[$ .

(b) Et donc, en dérivant  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ,  $\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$ .

2. (a) Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ ,  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ .

- (b) Si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont de rayon  $R_a$  et  $R_b$  respectivement, alors la série des  $\sum \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$  est de rayon de  $R_c \geq \min(R_a, R_b)$  et pour tout  $z$  tel que  $|z| < R_c$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

- (c) En effectuant le produit de Cauchy de  $\sum z^n$  avec elle-même, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

**Exercice 20 : Analyse**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

(a)  $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$ .

(b)  $\sum n^{(-1)^n} z^n$ .

(c)  $\sum \cos(n) z^n$ .

1. Donner les deux définitions :

- Celle du programme :  $R = \sup \{ \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\} \} \in [0, +\infty]$
- Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique  $R \in [0, +\infty]$  tel que

$$|z| < R \implies \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \implies \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. (a) Comme la série entière est lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général : pour  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\frac{(n+1)!^2 |z|^{2n+3} (2n)!}{(2n+2)! n!^2 |z|^{2n+1}} \rightarrow \frac{|z|^2}{4},$$

donc la série entière converge absolument si  $|z| < 2$  et diverge grossièrement si  $|z| > 2$  :  $\boxed{R = 2}$ .

- (b) Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n} \leq n^{(-1)^n} \leq n$$

et comme les séries entières  $\sum \frac{z^n}{n}$  et  $\sum n z^n$  ont un rayon de convergence égal à celui de  $\sum z^n$  donc 1, c'est aussi le cas de  $\sum n^{(-1)^n} z^n$  :  $\boxed{R = 1}$ .

- (c) La suite  $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée mais ne tend pas vers 0 (sinon, on a un problème avec  $\cos(2n) = 2 \cos^2 n - 1 \dots$ ) donc la série  $\sum \cos(n) 1^n$  ne converge pas absolument, donc  $\boxed{R = 1}$ .

*Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.*

**Exercice 21 : Analyse**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée telle que la série  $\sum a_n$  diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  ? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$  ?

1. Donner les deux définitions :

- Celle du programme :  $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\} \in [0, +\infty]$
- Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique  $R \in [0, +\infty]$  tel que

$$|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. Comme  $\sum a_n 1^n$  et  $(a_n 1^n)$  est bornée, 1 est sur le cercle de convergence :  $\boxed{R=1}$ .

3. Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$0 \leq a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

par l'inégalité de convexité classique sur le  $\ln$  (au programme de première année) donc  $(a_n)$  est bornée. De plus,

$$a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{terme général positif de série divergente}$$

donc  $\sum a_n$  diverge par comparaison.

Autre argument possible :  $a_{2n} = \sqrt{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \rightarrow 1$  donc  $a_n \not\rightarrow 0$  : la série  $\sum a_n$  diverge grossièrement.

Donc  $\boxed{R=1}$ .

**Exercice 22 : Analyse**

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction  $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$ .  
 La série obtenue converge-t-elle pour  $x = \frac{1}{4}$  ?  $x = \frac{1}{2}$  ?  $x = -\frac{1}{2}$  ?  
 En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

1. Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

On note  $R_{a+b}$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ .

Alors  $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$  avec égalité si  $R_a \neq R_b$ .

**En effet**, Si  $|z| \leq \min(R_a, R_b)$ , on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc  $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$ .

Si  $R_a \neq R_b$ , par exemple  $R_a < R_b$ ,  $z$  tel que  $R_a < |z| < R_b$ , alors  $a_n z^n \not\rightarrow 0$  et  $b_n z^n \rightarrow 0$  donc  $(a_n + b_n) z^n \not\rightarrow 0$  et  $|z| \geq R_{a+b}$  puis  $R_a \geq R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b) = R_a$ .

2. Pour  $|x| < 1$ ,  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ . Pour  $|x| < \frac{1}{2}$ ,  $\ln(1-2x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$ .

D'après 1., le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$  vaut  $\frac{1}{2}$ .

Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de  $f$  contient  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  et est

contenu dans  $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , et, pour  $|x| < \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ .

**Pour  $x = \frac{1}{4}$**  : la série entière converge et est continue en  $\frac{1}{4}$  car  $\frac{1}{4} \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

**Pour  $x = \frac{1}{2}$**  : la série entière diverge car elle est la somme d'une série convergente :  $\frac{1}{2}$  appartient à  $] -1, 1[$ , intervalle ouvert de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ , et d'une série divergente : la série harmonique.

**Pour  $x = -\frac{1}{2}$**  : la série entière converge en  $-\frac{1}{2}$  comme somme de deux séries convergentes. En effet,

- d'une part,  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$  converge car  $-\frac{1}{2} \in ] -1, 1[$ ;
- d'autre part,  $\sum_{n \geq 1} -\frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$  converge d'après le critère spécial des séries alternées : la suite  $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bien décroissante et de limite nulle.

La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée par le théorème d'Abel radial appliqué à  $x \mapsto f(-x)$ .

**Remarque** : Soit  $\sum a_n x^n$  est une série entière de rayon  $R > 0$ . On note  $f$  la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.

La version du théorème d'Abel radial au programme assure que

$$\text{si } \sum a_n R^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

En considérant la fonction la fonction  $x \mapsto f(-x)$  qui est la somme de la série entière  $\sum (-1)^n a_n x^n$  (de rayon de convergence toujours égal à  $R$ ), on a immédiatement l'extension suivante

$$\text{si } \sum a_n (-R)^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow -R^+} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

**Exercice 23 : Analyse**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe telle que la suite  $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières  $\sum a_n x^n$  et  $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$  ont le même rayon de convergence. On le note  $R$ .

2. Démontrer que la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $] -R, R[$ .

1. On pose  $\ell$  la limite de la suite convergente  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ . Alors, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières,  $R(\sum a_n x^n) = R = \frac{1}{\ell}$  (avec  $R = +\infty$  dans le cas  $\ell = 0$  et  $R = 0$  dans le cas  $\ell = +\infty$ ).

Puis, comme  $\frac{|(n+1)a_{n+1}|}{|na_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  donc  $R(\sum (n+1)a_{n+1}x^n) = \frac{1}{\ell} = R = R(\sum a_n x^n)$ .

2. On pose,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-R, R[, f_n(x) = a_n x^n$ .

Soit  $r \in ]0, R[$ . On pose  $D_r = [-r, r]$ .

On utilise le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des séries de fonctions :

**H1**  $\sum f_n$  converge simplement sur  $D_r$ .

**H2**  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D_r$ .

**H3** D'après 1.,  $\sum f'_n$  est une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Donc,  $\sum f'_n$  converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans  $] -R, R[$ , donc converge uniformément sur  $D_r$ .

On en déduit que  $\forall r \in ]0, R[, S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D_r$ . Donc,

$S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R, R[$ .



**Exercice 24 : Analyse**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ .

On pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ .

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction  $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$  et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer  $S(x)$ .  
 (b) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos \sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Par critère de d'Alembert, comme  $\left| \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0$ ,

la série entière  $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ .

2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  de rayon de convergence  $+\infty$ .

3. (a) Pour  $x \geq 0$ , on peut écrire  $x = t^2$  et  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(t)$  donc  $S(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x}$ .

Pour  $x < 0$ , on peut écrire  $x = -t^2$  et  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t)$  donc  $S(x) = \cos \sqrt{-x}$ .

- (b) D'après la question précédente,  $f = S$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à  $+\infty$ .

**Exercice 25 : Analyse**

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pose  $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ . Calculer la limite de  $(u_n)$ .

1.  $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  est continue et positive sur  $[0, +\infty[$ .

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $0 \leq \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leq \frac{1}{1+t^2}$  avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

donc  $\int \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$  converge et ainsi, par positivité,  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Autre rédaction possible : dans  $[0, +\infty[$ ,

$$0 \leq \int \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

d'où la convergence de l'intégrale puis l'intégrabilité par positivité.

2. On utilise le théorème de convergence dominée :

**H1** La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  vers la fonction  $f$  définie par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0, 1[ \\ \frac{1}{2+e^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in ]1, +\infty[ \end{cases}$$

**H2** Les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

**H3**  $\forall t \in [0, +\infty[, |f_n(t)| \leq \phi(t)$  avec  $\phi$  positive, continue et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Alors

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}$ .

**Exercice 26 : Analyse**

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ .

1. Justifier que  $I_n$  est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .  
(b) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
3. La série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$  est-elle convergente ?

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, +\infty[$ ,  $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . De plus,  $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ . Or  $2n > 1$ , donc  $t \mapsto \frac{1}{t^{2n}}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  par critère de Riemann. Donc, par équivalence,  $f_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc sur  $[0, +\infty[$ .

2. (a)  $\forall t \in [0, +\infty[$ ,  $f_{n+1}(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} = f_n(t)$  car  $1+t^2 \geq 1$ .

En intégrant, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} \leq I_n.$$

Donc  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

(b) Remarque :  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et positive ce qui nous assure la convergence de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Déterminons la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  en utilisant le théorème de convergence dominée.

**H1** La suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  vers la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(On peut aussi appliquer le théorème sur  $]0, +\infty[$  pour ne pas avoir à traiter le cas particulier de  $x = 0$ .)

**H2** Les  $f_n$  et  $f$  sont continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

**H3 Domination**

$$\forall t \in [0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \phi(t)$$

avec  $\phi$  continue et positive sur  $[0, +\infty[$  et

$$\int_0^{+\infty} |\phi(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty,$$

donc  $\phi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On obtient alors

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$$

et la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  a pour limite 0.

3. D'après les questions précédentes, la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est positive, décroissante et converge vers 0. Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer que

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n \text{ converge.}$$

**Exercice 27 : Analyse**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$  et  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$  sur  $[0, 1]$ .
2. Soit  $a \in ]0, 1[$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$  ?
3. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, 1]$  ?
4. Trouver la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

1. On a déjà  $f_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $x \in ]0, 1[$ . Pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x^2} \frac{1}{n^2}$ , donc  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Soit  $a \in ]0, 1[$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 1], |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}$$

Comme cette majoration est indépendante de  $x$ ,  $\|f_n - f\|_{\infty, [a, 1]} \leq \frac{e^{-a}}{1+n^2a^2}$ .

Or  $\frac{e^{-a}}{1+n^2a^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\|f_n - f\|_{\infty, [a, 1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On en déduit que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

3. Les fonctions  $f_n$  étant continues sur  $[0, 1]$  et la limite simple  $f$  ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0, 1]$ .

4. On utilise le théorème de convergence dominée.

**H1**  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

**H2** Les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont continues par morceaux sur  $[0, 1]$ .

**H3 Domination**  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], |f_n(x)| \leq e^{-x} \leq 1 = \varphi(x)$  avec  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue, positive, intégrable sur  $[0, 1]$ .

On en conclut donc que

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

**Exercice 28 : Analyse**

*N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction  $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$  est-elle intégrable sur  $]2, +\infty[$  ?

2. Soit  $a$  un réel strictement positif.

La fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$  est-elle intégrable sur  $]0, +\infty[$  ?

1. Soit  $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$  continue sur  $]2, +\infty[$ . De plus,

**Sur**  $]2, 3]$

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x \rightarrow 2}{\sim} \frac{e^{-2}}{2} \times \frac{1}{(x-2)^{1/2}}.$$

Or  $x \mapsto \frac{1}{(x-2)^{1/2}}$  est intégrable sur  $]2, 3]$  (fonction de Riemann intégrable sur  $]2, 3]$  car  $\frac{1}{2} < 1$ ).

Donc, par comparaison,  $f$  est intégrable sur  $]2, 3]$ .

**Sur**  $[3, +\infty[$

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} = g(x).$$

Or  $x^2 g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

Comme  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est intégrable sur  $[3, +\infty[$ , on en déduit que  $g$  est intégrable sur  $[3, +\infty[$ .

Donc, par comparaison,  $f$  est intégrable sur  $[3, +\infty[$ .

Ainsi,  $f$  est intégrable sur  $]2, +\infty[$ .

2. **Cas particulier d'intégrales de Bertrand** : soit  $a$  un réel strictement positif. On pose  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ , fonction continue sur  $]0, +\infty[$ .

**Sur**  $]0, e]$

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x = g(x).$$

Or  $\sqrt{x}g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc, au voisinage de  $0$ ,  $g(x) = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$ .

Or  $x \mapsto \frac{1}{x^{1/2}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  (fonction de Riemann intégrable sur  $]0, 1]$  car  $1/2 < 1$ ).

Donc  $g$  est intégrable sur  $]0, e]$ , et, par comparaison,  $f$  est intégrable sur  $]0, e]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

**Sur**  $[e, +\infty[$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^a} = h(x).$$

**si**  $a > 1$ , prenons  $\gamma$  tel que  $1 < \gamma < a$ .

$$x^\gamma h(x) = x^{\gamma-a} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $h(x) = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$ .

Or  $x \mapsto \frac{1}{x^\gamma}$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$  (fonction de Riemann intégrable sur  $[e, +\infty[$  car  $\gamma > 1$ ), donc  $h$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

Ainsi, par comparaison,  $f$  est intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

**si**  $a \leq 1$ ,

$$\forall x \in [e, +\infty[, h(x) \geq \frac{1}{x^a} \geq 0$$

(C'est la raison pour laquelle on a coupé l'intervalle en  $e$ .)

Or  $x \mapsto \frac{1}{x^a}$  non intégrable sur  $[e, +\infty[$  (fonction de Riemann avec  $a \leq 1$ ), donc, par comparaison de fonctions positives,  $h$  n'est pas intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

Ainsi, par équivalence,  $f$  n'est pas intégrable sur  $[e, +\infty[$ .

Finalement,  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  si et seulement si  $a > 1$ .

**Exercice 29 : Analyse**

On pose  $\forall x \in ]0, +\infty[, \forall t \in ]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$ .

1. **Démontrer que** :  $\forall x \in ]0, +\infty[,$  la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On pose alors :  $\forall x \in ]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

2. Pour tout  $x \in ]0, +\infty[,$  exprimer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ .

3. **Démontrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $\Gamma'(x)$  sous forme d'intégrale.**

1. Soit  $x > 0$ . La fonction  $t \mapsto f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[,$  positive.

- Intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  : par croissances comparées,  $e^{-t} t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ . On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann.
- Intégrabilité sur  $]0, 1[$  :  $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ . Or (Riemann encore, mais pas au même endroit),  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  car  $1-x < 1$ .

Donc  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

2. Par intégration par parties, si  $0 < \varepsilon < A$ ,

$$\int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{x-1} dt = \left[ e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^x dt$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A} \frac{A^x}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

et de plus

$$e^{-\varepsilon} \frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $A \rightarrow +\infty$ ,

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

C'est-à-dire  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

3. On utilise le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des intégrales à paramètres.

**H1** Pour tout  $t \in ]0, +\infty[, x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  par opérations avec

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, t) \mapsto \ln(t) f(x, t).$$

**H2** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+, t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  par 1.

**H3** Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

**H4 Domination** : Soit  $K = [a, b]$  avec  $0 < a < b$ . On a

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t) = \begin{cases} |\ln t| e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ |\ln t| e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

avec  $\phi$  positive, continue par morceaux sur  $]0, +\infty[,$  intégrable sur  $]0, 1[$  car  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left( \frac{1}{t^a} \right)$  avec  $1-a < a < 1$

et sur  $[1, +\infty[,$  car  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

On a donc  $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_*^+)$  et  $\Gamma' : (x, t) \mapsto \int_0^{+\infty} \ln(t) f(x, t) dt$ .

**Exercice 30 : Analyse**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

2. Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.  
 (b) Résoudre (E).

Pour gagner du temps, il est conseillé de traiter les deux premières questions simultanément !

Soit  $I$  et  $J$  des intervalles réels et  $g : \begin{cases} J \times I & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto f(x, t) \end{cases}$

On suppose

**H1**  $\forall t \in I, x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$ , de dérivée  $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ .

**H2**  $\forall x \in J, t \mapsto g(x, t)$  est intégrable sur  $I$ .

**H3**  $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  continue par morceaux sur  $I$ .

1. **H4 Domination globale ou sur tout segment de  $\frac{\partial g}{\partial x}$**  : Éventuellement sur tout segment  $S$ , il existe une fonction  $\phi$  continue par morceaux, positive, intégrable sur  $I$  telle que

$$\forall x \in J \text{ ou } S, \forall t \in I, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t).$$

Alors

**C1**  $f : x \mapsto \int_I g(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $J$

**C2**  $\forall x \in J, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est intégrable sur  $I$  et  $f'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$ .

2. On pose  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto e^{-t^2} \cos(xt) \end{cases}$

On applique le théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des intégrales à paramètres.

**H1**  $\forall t \in [0, +\infty], x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  par opérations et  $\frac{\partial g}{\partial x} : (x, t) \mapsto -te^{-t^2} \sin(xt)$ .

**H2**  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$  par croissances comparées donc,  $t \mapsto u(x, t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en  $+\infty$ .

**H3**  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

**H4 Domination globale**  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \phi(t)$  avec  $\phi$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

En effet, par croissances comparées,  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ . Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en  $+\infty$ ,  $\phi$  est bien intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

On a donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$ .

3. (a) On a,  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$ . Procédons à une intégration par parties. Soit  $A \geq 0$ .

$$\int_0^A -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

En passant à la limite quand  $A \rightarrow +\infty$ , on obtient  $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$ .

Donc  $f$  est solution de l'équation différentielle  $(L) : y' + \frac{x}{2} y = 0$ .

(b) Les solutions de (L) sont les fonctions  $x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{4}}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 31****Exercice 32 : Analyse**

Soit l'équation différentielle :  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .  
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0, 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $] -1, 1[$  ?

1. **Analyse** Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $S$ . Pour tout  $x \in ] -R, R[$ ,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$$

Donc

$$x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} \right) x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction  $S$  est solution sur  $] -R, R[$  de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0.$$

C'est-à-dire  $\forall n \in \mathbb{N}, n a_{n+1} = (n+1) a_n$ , ce qui revient à

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1.$$

**Synthèse** Le rayon de convergence de la série entière  $\sum n x^n$  étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$$

définies sur  $] -1, 1[$  avec  $a_1 \in \mathbb{R}$ , et même sur  $\mathbb{R}$  si  $a_1 = 0$ .

2. Notons  $(L)$  l'équation  $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

Prouvons que les solutions de  $(L)$  sur  $]0, 1[$  ne sont pas toutes développables en série entière sur  $] -1, 1[$ .

En effet, si toutes les solutions de  $(L)$  sur  $]0, 1[$  étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de  $(L)$  sur  $]0, 1[$  serait égal à la droite vectorielle  $\text{Vect}(f)$  où  $f : x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ .

Or, comme les fonctions  $x \mapsto x(x-1)$ ,  $x \mapsto 3x$  et  $x \mapsto 1$  sont continues sur  $]0, 1[$  et comme la fonction  $x \mapsto x(x-1)$  ne s'annule pas sur  $]0, 1[$ , l'ensemble des solutions de  $(L)$  sur  $]0, 1[$  est un plan vectoriel, ce qui est contradictoire.



**Exercice 33 : Analyse**

On pose  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

1.  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations.

Pour la continuité en  $(0, 0)$ , on peut utiliser la célèbre inégalité  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  (car  $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ )

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = f(0, 0)$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , alors

$$|f(x, y)| = |r^{3/2} \cos \theta \sin \theta| \leq r^{3/2} \rightarrow 0$$

avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ .

Ainsi,  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

2.  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations.

L'application partielle  $f_x : x \mapsto f(x, 0)$  vaut 0 si  $x \neq 0$  et si  $x = 0$ . C'est donc l'application nulle. Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe

et vaut  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

Par symétrie, on a aussi  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

3.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations.

Analysons la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $(0, 0)$ . On calcule, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) = \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  n'est pas continue en  $(0, 0)$  et  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 34 : Analyse**

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que  $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$  et  $x_n \rightarrow x$ .
3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\bar{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Soit  $B$  une autre partie non vide de  $E$ . Montrer que  $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ .

1. Un point adhérent à  $A$  est un point  $x$  tel que toute boule ouverte centrée en  $x$  rencontre  $A$  :

$$x \in E \quad \text{et} \quad \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

2. ( $\implies$ ) On suppose que  $x$  est adhérent à  $A$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Avec  $r = \frac{1}{n+1}$ , on a  $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$  donc tel que  $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \leq \frac{1}{n+1}$ .

Cela définit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ .

( $\impliedby$ ) Si on a une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \rightarrow x$ , alors pour tout  $r > 0$ , on a un rang à partir duquel  $x_n \in B(a, r) \cap A \neq \emptyset$  donc  $x \in \bar{A}$ .

3.
  - $\bar{A}$  est une partie non vide de  $E$  puisqu'elle contient  $A$  entier.
  - Si  $x, y \in \bar{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , par la caractérisation séquentielle (question 2, sens direct), on a  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telles que  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ .  
Alors  $(x_n + \lambda y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  (car  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ) est une suite telle que  $x_n + \lambda y_n \rightarrow x + \lambda y$ .  
Donc, par la question 2 (sens réciproque),  $x + \lambda y \in \bar{A}$ .

Par caractérisation,  $\bar{A}$  est encore un sous-espace vectoriel de  $E$ .

4. Toujours avec la caractérisation séquentielle, en considérant la norme produit,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \overline{A \times B} &\iff \exists ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, (x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \\ &\iff \exists ((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \rightarrow y \\ &\iff \begin{cases} \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow x \\ \exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}, y_n \rightarrow y \end{cases} \\ &\iff (x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}. \end{aligned}$$

donc  $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$ .

**Exercice 35 : Analyse**

$E$  et  $F$  désignent deux espaces vectoriels normés.

On note  $\|\cdot\|_E$  ( respectivement  $\|\cdot\|_F$ ) la norme sur  $E$  (respectivement sur  $F$ ).

1. Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $a$  un point de  $E$ .

On considère les propositions suivantes :

**P1.**  $f$  est continue en  $a$ .

**P2.** Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ , alors  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ .

Prouver que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.

2. Soit  $A$  une partie dense dans  $E$ , et soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $E$  dans  $F$ .

Démontrer que si, pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) = g(x)$ , alors  $f = g$ .

1. ■ Supposons **P1** :  $f$  continue en  $a$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On a  $\eta > 0$  tel que  $\|x_n - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$ .

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow a$ . On a un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel  $\|x_n - a\|_E \leq \eta$ .

Mais alors, si  $n \geq N$ ,  $\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$ .

C'est donc bien que  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ , donc **P2** est vraie.

■ Montrons que **P2**  $\implies$  **P1** par contraposée. Supposons **P1** fautive :  $f$  n'est pas continue en  $a$ .

On a donc  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall \eta > 0, \exists x \in E, \begin{cases} \|x - a\|_E \leq \eta \\ \|f(x) - f(a)\|_F > \varepsilon \end{cases}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , avec  $\eta = \frac{1}{2^n}$ , on a  $x_n \in E$  tel que  $\begin{cases} \|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{2^n} \\ \|f(x_n) - f(a)\|_F > \varepsilon \end{cases}$

Cela définit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que  $x_n \rightarrow a$  et  $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$  donc **P2** est fautive.

2. Par caractérisation séquentielle de la densité de  $A$  dans  $E$ , si  $x \in E$ , on a une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a_n \rightarrow x$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(a_n) = g(a_n)$ .

Par continuité, en passant à la limite, on obtient  $f(x) = g(x)$ .

Ainsi,  $f = g$ .

**Exercice 36 : Analyse**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés sur le corps  $\mathbb{R}$ .

On note  $\|\cdot\|_E$  (respectivement  $\|\cdot\|_F$ ) la norme sur  $E$  (respectivement sur  $F$ ).

1. Démontrer que si  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

**P1.**  $f$  est continue sur  $E$ .

**P2.**  $f$  est continue en  $0_E$ .

**P3.**  $\exists k > 0$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ .

2. Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|.$$

On considère l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$ .

Démontrer que  $\varphi$  est linéaire et continue.

1. **P1**  $\Rightarrow$  **P2** est immédiat.

**P2**  $\Rightarrow$  **P3** Supposons  $f$  est continue en  $0_E$  et remarquons que le résultat à montrer s'écrit, pour  $x \neq 0_E$ ,

$$\left\| f\left(\frac{x}{k\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq 1, \text{ avec } \left\| \frac{x}{k\|x\|_E} \right\|_E = \frac{1}{k}.$$

Écrivons alors la définition de la continuité en  $0_E$  avec  $\varepsilon = 1$  : on a  $\eta > 0$  tel que si  $\|x\|_E \leq \eta$ ,  $\|u(x)\|_F \leq 1$  (car  $u(0_E) = 0_E$ ).

La remarque précédente nous incite à choisir  $k$  tel que  $\frac{1}{k} \leq \eta$ . Poser  $k = \frac{1}{\eta}$ .

Alors, si  $x \in E \setminus \{0_E\}$ ,  $\left\| \frac{x}{k\|x\|_E} \right\|_E = \frac{1}{k} = \eta$ , donc  $\left\| f\left(\frac{x}{k\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq 1$  ce qui donne bien  $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ .

Comme cette inégalité est également vérifiée en  $0_E$ ,  $k = \frac{1}{\eta}$  convient.

**P3**  $\Rightarrow$  **P1** S'il existe  $k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$ , alors

$$\forall x, x' \in E, \|u(x) - u(x')\|_F = \|u(x - x')\|_F \leq k\|x - x'\|_E$$

donc  $u$  est  $k$ -lipschitzienne, donc continue (et même uniformément) sur  $E$ .

2. La linéarité de  $\varphi$  provient de celle de l'intégrale, en général.

Pour toute  $f \in E$ , les bornes de l'intégrale étant bien ordonnées,

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = 1 \times \|f\|_\infty.$$

Donc  $\varphi$  est linéaire et continue sur  $E$ .

**Exercice 37 : Analyse**

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. (a) Démontrer que  $N_\infty$  et  $N_1$  sont deux normes sur  $E$ .  
 (b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .  
 (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .
2. Démontrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes.

1. (a) **Bonne définition** Une fonction continue sur un segment étant bornée et admettant bien une intégrale,  $N_\infty$  et  $N_1$  sont bien définies sur  $E$ , à valeurs réelles positives.

**Séparation** Soit  $f \in E$ .

- Si  $N_\infty(f) = 0$ , alors pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f(x)| = 0$  donc  $f = 0_E$ .
- Si  $N_1(f) = 0$ , alors, comme  $|f|$  est continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f(x)| = 0$  donc  $f = 0_E$ .

**Homogénéité** Si  $f \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

- Comme  $|\lambda| \geq 0$ ,  $N_\infty(\lambda f) = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} (|\lambda| \cdot |f(x)|) = |\lambda| \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| = |\lambda| N_\infty(f)$ .
- $N_1(\lambda f) = \int_0^1 |\lambda f(t)| dt = \int_0^1 |\lambda| \cdot |f(t)| dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| dt = |\lambda| N_1(f)$  par linéarité de l'intégrale.

**Inégalité triangulaire** Si  $f, g \in E$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  donc

- $|f(x) + g(x)| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$  qui ne dépend pas de  $x$  donc  $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ .
- Par croissance et linéarité de l'intégrale,

$$N_1(f + g) = \int_0^1 |f(t) + g(t)| dt \leq \int_0^1 (|f(t)| + |g(t)|) dt = \int_0^1 |f(t)| dt + \int_0^1 |g(t)| dt = N_1(f) + N_1(g).$$

$N_\infty$  et  $N_1$  sont donc bien des normes sur  $E$ .

- (b) Soit  $f \in E$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f(t)| \leq N_\infty(f)$  donc par croissance de l'intégrale,

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 N_\infty(f) dt = N_\infty(f).$$

donc  $N_1(f) \leq 1 \cdot N_\infty(f)$ .

- (c) **Première méthode** Si  $\mathcal{O}$  ouvert de  $E$  pour la norme  $N_1$  et  $f \in \mathcal{O}$ , alors on a  $r > 0$  tel que la boule ouverte  $B_1(f, r)$  pour  $N_1$  est incluse dans  $\mathcal{O}$ . Alors, si  $N_\infty(g - f) \leq r$ , vu la question précédente,  $N_1(g - f) \leq r$  donc  $g \in B_1(f, r) \subset \mathcal{O}$ .

On a donc  $r > 0$  tel que  $B_\infty(f, r) \subset E$  (boule ouverte pour  $N_\infty$ ) :  $\mathcal{O}$  est ouvert pour  $N_\infty$ .

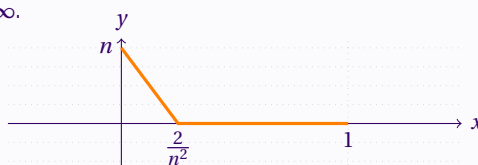
**Deuxième méthode** la question précédente nous dit que l'application linéaire  $\text{id}_E : (E, N_\infty) \rightarrow (E, N_1)$  est continue.

Alors, si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$  pour  $N_1$ ,  $\mathcal{O} = \text{id}_E^{-1}(\mathcal{O})$  est un ouvert pour  $N_\infty$ .

2. Pour montrer que les normes  $N_1$  et  $N_\infty$  ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\left( \frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  ne soit pas bornée.

- $f_n : x \mapsto x^n$  convient car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $N_\infty(f_n) = 1$  et  $N_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$  donc  $\frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = n+1 \rightarrow +\infty$ .
- On peut aussi, de façon moins miraculeuse, chercher une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que  $(N_1(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée et non  $(N_\infty(f_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Cela peut se construire manuellement est imposant la norme infinie à valoir  $n$  tandis que l'aire sous la courbe vaut  $\frac{1}{n}$  par exemple. Il suffit que  $f_n$  soit affine de  $(0, n)$  à  $(\frac{2}{n^2}, 0)$  et nulle ensuite (l'intégrale de  $f_n$  est l'aire d'un triangle rectangle valant  $\frac{1}{n}$ ).

Alors, si  $n \geq 1$ ,  $\frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = n^2 \rightarrow +\infty$ .



**Exercice 38 : Analyse**

1. On se place sur  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  définie par  $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

Soit  $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto u(f) = g \end{cases}$  avec  $\forall x \in [0, 1], g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

On admet que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

Prouver que  $u$  est continue et calculer  $\|u\|$ .

Indication : considérer, pour tout entier  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  un  $n$ -uplet non nul, fixé.

Soit  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{cases}$

(a) Justifier que  $u$  est continue quel que soit le choix de la norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

(b) On munit  $\mathbb{R}^n$  de  $\|\cdot\|_2$  où

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Calculer  $\|u\|$ .

3. Déterminer un espace vectoriel  $E$ , une norme sur  $E$  et un endomorphisme de  $E$  non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit  $f \in E$ .

$$\|u(f)\|_1 = \int_0^1 |g(x)| dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \leq \int_0^1 \left( \int_0^x \underbrace{|f(t)|}_{\geq 0} dt \right) dx \leq \int_0^1 \left( \int_0^1 \underbrace{|f(t)|}_{\geq 0} dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1$$

donc  $u$  est continue,  $\|u\|$  existe et  $\|u\| \leq 1$ .

Considérons comme proposé, pour tout entier  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(t) = ne^{-nt}$ .

Alors pour tout  $x \in [0, 1], u(f_n)(x) = g_n(x) = \int_0^x ne^{-nt} dt = [-e^{-nt}]_0^x = 1 - e^{-nx}$ . Donc

$$\|u(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nt}) dt = 1 + \left[ \frac{e^{-nt}}{n} \right]_0^1 = 1 + \frac{e^{-n} - 1}{n}.$$

Or  $\|f_n\|_1 = \int_0^1 ne^{-nt} dt = 1 - e^{-n}$ , donc  $\frac{\|u(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{1 + \frac{e^{-n} - 1}{n}}{1 - e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure,  $\|u\| = \sup_{f \neq 0 \in E} \frac{\|u(f)\|_1}{\|f\|_1} = 1$ .

2. (a)
  - $u$  étant linéaire sur  $\mathbb{R}^n$  ;
  - $\mathbb{R}^n$  étant de dimension finie ;
  - les normes étant toutes équivalentes sur un espace de dimension finie ;
  - les applications linéaires définies sur un espace de dimension finie étant automatiquement continues ;

$u$  est continue pour toute norme de  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Alors, en notant  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et en utilisant le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$

$$|u(x)| = \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right| = |(a|x)| \leq \|a\|_2 \|x\|_2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz, avec égalité si  $x$  et  $a$  sont colinéaires. On a donc  $\|u\| = \|a\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ .

3. Un tel espace est nécessairement de dimension finie. Posons  $E = \mathbb{K}[X]$  muni de la norme  $\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$  où les  $a_k$  sont les coefficients de  $P$  (il n'y en a qu'un nombre fini qui ne sont pas nuls) et l'endomorphisme  $u : P \mapsto P'$ . Alors si  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\|u(X^n)\|_\infty}{\|X^n\|_\infty} = \frac{\|nX^{n-1}\|_\infty}{\|X^n\|_\infty} = \frac{n}{1} = n \rightarrow +\infty$$

donc  $u$  n'est pas continu sur  $E$  : on ne peut avoir de  $k > 0$  tel que  $\forall P \in \mathbb{K}[X], \|u(P)\|_\infty \leq k \|P\|_\infty$ .

**Exercice 39 : Analyse**

On note  $\ell^2$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que la série  $\sum x_n^2$  converge.

1. (a) Démontrer que, pour  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ , la série  $\sum x_n y_n$  converge.

On pose alors  $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ .

(b) Démontrer que  $\ell^2$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que  $(\cdot|\cdot)$  est un produit scalaire dans  $\ell^2$ .

On suppose que  $\ell^2$  est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée  $\| \cdot \|$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x = (x_n) \in \ell^2$ , on pose  $\varphi(x) = x_p$ .

Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire et continue de  $\ell^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

3. On considère l'ensemble  $F$  des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer  $F^\perp$  (au sens de  $(\cdot|\cdot)$ ). Comparer  $F$  et  $(F^\perp)^\perp$ .

1. (a) Soit  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2} (x_n^2 + y_n^2)$  qui est un terme général positif de série convergente.

Donc, par comparaison de termes généraux positifs,  $\sum x_n y_n$  converge absolument donc converge.

On peut aussi utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=1}^N |x_n| |y_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} y_n^2} < +\infty$$

donc la suite des sommes partielles est majorée : la série  $\sum x_n y_n$  converge absolument donc converge.

(b)  $\ell^2$  est une partie non vide (contient la suite nulle) de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Et, si  $x, y \in \ell^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(x_n + \lambda y_n)^2 = x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2\lambda x_n y_n$$

est un terme général de série convergente par combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes, en utilisant la question précédente.

Donc  $x + \lambda y \in \ell^2$  qui est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Par linéarité de l'évaluation,  $\varphi$  est linéaire : si  $x, y \in \ell^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x + \lambda y) = (x + \lambda y)_p = x_p + \lambda y_p$  (c'est la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire de suites).

Puis, si  $x \in \ell^2$ ,

$$|\varphi(x)| = |x_p| = \sqrt{x_p^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \|x\|$$

donc  $\varphi \in \mathcal{L}_c(\ell^2, \mathbb{R})$ .

3. Remarquons qu'on a bien, naturellement,  $F \subset \ell^2$ .

Soit  $x \in F^\perp$ . Alors  $x$  est orthogonale aux suites de la base canonique  $e^{(n)} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n^e}, 0, \dots)$  de  $F$ .

Donc, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(x|e^{(n)}) = x_n = 0$ , ce qui conduit à  $F^\perp \subset \{0\}$ . Par ailleurs,  $0 \in F^\perp$ , donc  $F^\perp = \{0\}$ .

On a alors  $F \subsetneq (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell^2$  (car il y a des suites dans  $\ell^2$  qui ne sont pas presque nulles, comme  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ , par exemple.)

**Exercice 40 : Analyse**

Soit  $A$  une algèbre de dimension finie admettant  $e$  pour élément unité et munie d'une norme notée  $\|\cdot\|$ .  
On suppose que

$$\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

1. Soit  $u$  un élément de  $A$  tel que  $\|u\| < 1$ .

(a) Démontrer que la série  $\sum u^n$  est convergente.

(b) Démontrer que  $(e - u)$  est inversible et que

$$(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

2. Démontrer que, pour tout  $u \in A$ , la série  $\sum \frac{u^n}{n!}$  converge.

1. (a) La norme étant sous-multiplicative, on a, par une récurrence facile, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq \|u^n\| \leq \|u\|^n$$

qui est un terme général de série géométrique convergente car  $\|u\| \in [0, 1[$  donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs,  $\sum \|u^n\|$  converge, donc  $\sum u^n$  est absolument convergente.

Comme, de plus,  $A$  est de dimension finie,  $\sum u^n$  converge.

(b) On a, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (e - u) \times u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (u^n - u^{n+1}) = e - u^N$$

par télescopage. Or  $u^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0_A$  car  $\sum u^n$  converge, ou car  $\|u^N\| \leq \|u\|^N \rightarrow 0$ , donc

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e.$$

Par ailleurs, comme  $x \mapsto (e - u)x$  est continue sur  $A$  car linéaire sur l'espace vectoriel  $A$  de dimension finie,

$$(e - u) \times \sum_{n=0}^N u^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (e - u) \times \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

Par unicité de la limite,  $(e - u) \times \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = e$ .

On montre de même que  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) \times (e - u) = e$ .

On a donc que  $e - u$  est inversible et que  $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ .

2. Soit  $u \in A$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \left\| \frac{u^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$  qui est un terme général positif de série (exponentielle) convergente

(vers  $e^{\|u\|}$ ), donc  $\sum \frac{u^n}{n!}$  est absolument convergente par comparaison de terme généraux positifs de séries convergentes, donc convergente car  $A$  est de dimension finie.



**Exercice 41 : Analyse**

**Exercice 42 : Analyse**

**Exercice 43 : Analyse**

**Exercice 44 : Analyse**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.  
 (b) Montrer que  $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ .

2. Montrer que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .  
 (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

1. (a)  $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow \ell.$

Autrement dit,  $\overline{A}$  est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de  $A$ .

- (b) Supposons  $A \subset B$ .

- **Avec des suites** : Soit  $x \in \overline{A}$ . Alors  $x$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$  qui est aussi une suite d'éléments de  $B$ , donc  $x \in \overline{B}$ . Ainsi,  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .
- **On peut aussi revenir à la définition** : si  $x \in \overline{A}$ , pour tout  $r > 0 \emptyset \neq B(a, r) \cap A \subset B(a, r) \cap B$  donc  $B(a, r) \cap B \neq \emptyset$  donc  $x \in \overline{B}$ . Ainsi,  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .
- **On peut utiliser la caractérisation** de l'adhérence comme étant le plus petit fermé contenant la partie : comme  $\overline{B}$  est un fermé contenant  $B$  donc  $A$ , il est plus grand au sens de l'inclusion que  $\overline{A}$  c'est-à-dire  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .

2. On a déjà  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$ , donc, avec la question précédente,  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$  et  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$  donc  $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Puis

- **Avec la caractérisation** :  $\overline{A \cup B}$  est un fermé contenant  $A \cup B$ , donc le plus petit ensemble vérifiant cette propriété vérifie  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ .
- **Avec des suites** : si  $x \in \overline{A \cup B}$ , on a une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ . Soit les ensembles  $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N}, u_n \in A\}$  et  $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N}, u_n \in B\}$  vérifient  $\mathbb{N}_A \cup \mathbb{N}_B = \mathbb{N}$ . L'un d'entre eux au moins est donc infini. On peut alors, avec un tel ensemble infini, construire une extractrice  $\varphi$  dont l'image est exactement cet ensemble :  $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_A$  ou  $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_B$ . On obtient alors  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  ou  $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$  telle que  $x_n \rightarrow x$ , donc  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Donc  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$  et, finalement,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

3. (a) ■ **Avec 1.b** :  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$  donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$  donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$  donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .  
 ■ **Avec la définition** : si  $x \in \overline{A \cap B}$ , pour tout  $r > 0, B(x, r) \cap A \cap B \neq \emptyset$  donc  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$  et  $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$  donc  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$  et on a bien  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

- **Avec la caractérisation** :  $\overline{A} \cap \overline{B}$  est un fermé contenant  $A \cap B$  car  $A \subset \overline{A}$  et  $B \subset \overline{B}$ , donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

- (b) Prenons  $E = \mathbb{R}, A = ]0, 1[$  et  $B = ]1, 2]$ . Alors  $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$ .

**Exercice 45 : Analyse**

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$ .

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . On note  $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\bar{A}$ .
  - (b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\bar{A}$  est convexe.
2. On pose  $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .
    - (a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \bar{A}$ .
    - (b) On suppose que  $A$  est fermée et que  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$ . Prouver que  $A$  est convexe.

1. (a)  $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, x_n \rightarrow \ell.$

Autrement dit,  $\bar{A}$  est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de  $A$ .

- (b) Supposons  $A$  est convexe, et donnons-nous  $x, y \in \bar{A}$  et  $t \in [0, 1]$ .

On a donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telles que  $x_n \rightarrow x$  et  $y_n \rightarrow y$ .

Alors  $(x_n + t y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  par convexité de  $A$  et  $x_n + t y_n \rightarrow x + t y$  donc  $x + t y \in \bar{A}$ .

En résumé,  $\bar{A}$  est convexe.

2. (a) Soit  $x \in E$  tel que  $d_A(x) = 0$ .

- **Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure** : on a  $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que

$$\|x - x_n\| \rightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = d_A(x) = 0,$$

c'est-à-dire  $x_n \rightarrow x$ .

Par caractérisation séquentielle de l'adhérence,  $x \in \bar{A}$ .

- **Par caractérisation de la borne inférieure** : pour tout  $r > 0$ , on a  $a \in A$  tel que  $\|x - a\| < r$  ( $r$  n'est pas un minorant de  $\{\|x - a\|, a \in A\}$ ), autrement dit  $a \in A \cap B(a, r) \neq \emptyset$  donc  $x \in \bar{A}$ .

- (b) On suppose que  $A$  est fermée et que  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$ .

On a se donne  $x, y \in A$  et  $t \in [0, 1]$ . On veut montrer que  $x + t y \in A$ .

Comme  $x, y \in A, d_A(x) = d_A(y) = 0$  donc  $0 \leq d_A(tx + (1-t)y) \leq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0$  donc  $d_A(tx + (1-t)y) = 0$ .

On en déduit avec la question précédente que  $tx + (1-t)y \in \bar{A}$ .

Or  $A$  est fermée donc  $A = \bar{A}$  donc  $tx + (1-t)y \in A$ .

Finalement, on a bien montré que  $A$  est convexe.

**Exercice 46 : Analyse**

**Exercice 47 : Analyse**

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$$

$$2. \sum a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$$

1. La série entière étant lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général. Pour tout réel  $x$ , on pose  $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$ . Pour  $x$  non nul,

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{3nx^2}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |3x^2|$$

Donc, si  $|3x^2| < 1$  c'est-à-dire si  $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  alors  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$  converge absolument et si  $|3x^2| > 1$  c'est-à-dire si  $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$  alors  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$  diverge. On en déduit que  $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

$$\text{On pose } \forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[ , S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}.$$

Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a  $\forall t \in ]-1, 1[ , \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ .

$$\text{Ainsi } \forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right[ , S(x) = -\ln(1-3x^2).$$

**2. Le corrigé officiel est particulièrement imprécis sur cet exemple.**

Posons les suites  $(b_n)$  et  $(c_n)$  telles que  $b_n = a_{2p}$  si  $n = 2p$  et 0 sinon, et  $c_n = a_{2p+1}$  si  $n = 2p+1$  et 0 sinon. Alors les séries entières  $\sum b_n x^n$  et  $\sum c_n x^n$  ont même rayon de convergence que  $\sum a_{2n} x^{2n}$  et  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$  respectivement. Or

- $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$  converge si et seulement si  $|4x^2| < 1$  si et seulement si  $|x| < \frac{1}{2}$  : son rayon de convergence est  $R_1 = \frac{1}{2}$ .
- $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = \sum (5x^2)^n$  converge si et seulement si  $|5x^2| < 1$  si et seulement si  $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$  : son rayon de convergence est  $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Finalement,  $\sum a_n x^n$  est la somme des séries entières  $\sum b_n x^n$  et  $\sum c_n x^n$  qui ont des rayons de convergence  $R_1 \neq R_2$  donc celui de  $\sum a_n x^n$  vaut  $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

*Autre argument possible avec la sommabilité* : les séries  $\sum a_{2n} x^{2n}$  et  $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$  convergent absolument toutes les deux si et seulement si c'est le cas de  $\sum a_n x^n$  : c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquets avec  $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N} + 1)$ ). On en déduit que  $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

*Autre argument possible sans la sommabilité* :  $a_{2n} x^{2n} \rightarrow 0$  et  $a_{2n+1} x^{2n+1} \rightarrow 0$  si et seulement si  $a_n x^n \rightarrow 0$ .

D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles ou en utilisant une somme de séries entières)

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right[ , S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.$$

**Exercice 48 : Analyse**

$\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$ .

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit  $(P_n)$  une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f$ .
  - (a) Montrer que la suite de fonctions  $(P_n f)$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .
  - (b) Démontrer que  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt$ .
  - (c) Calculer  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$ .
3. En déduire que  $f$  est la fonction nulle sur le segment  $[0, 1]$ .

1. Toute fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.

2. On pose, pour  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , fonction continue sur un segment donc bornée,  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ .

(a)  $f$  et  $P_n - f$  étant continues sur le segment  $[0, 1]$  donc bornées,

$$\forall t \in [0, 1], |P_n(t)f(t) - f^2(t)| = |f(t)| \cdot |P_n(t) - f(t)| \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\|P_n f - f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \tag{1}$$

Or  $(P_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  donc  $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc, d'après (1),  $\|P_n f - f^2\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $(P_n f)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .

(b) On utilise le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment :

**H1**  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n f$  est continue sur  $[0, 1]$ .

**H2** D'après la question précédente,  $(P_n f)$  converge uniformément sur le segment  $[0, 1]$  vers  $f^2$ .

Donc  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt$ .

(c)  $P \mapsto \int_0^1 P(t) f(t) dt$  et  $P \mapsto 0$  sont linéaires et coïncident sur la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$  donc elles sont

égales. Ainsi,  $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt = 0$ .

3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a  $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ . Or  $f^2$  est positive et continue sur  $[0, 1]$ , donc  $f^2$  est nulle sur  $[0, 1]$  et donc  $f$  est nulle sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 49 : Analyse**

Soit  $\sum a_n$  une série absolument convergente à termes complexes. On pose  $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ .

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$ .

1. (a) Justifier que la suite  $(a_n)$  est bornée.
- (b) Justifier que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .

On admettra, pour la suite de l'exercice, que  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

2. (a) Justifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et calculer  $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ .

En déduire la convergence et la valeur de  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ .

- (b) Prouver que  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

1. Rappelons que,  $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \frac{x^n}{n!}$  converge vers  $e^x$ .

- (a)  $\sum a_n$  converge absolument, donc converge simplement; donc la suite  $(a_n)$  converge vers 0 et donc elle est bornée.

**Autre méthode :** On remarque que  $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$ .

- (b) Soit  $t \in [0, +\infty[$ . On a  $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq M \frac{t^n}{n!}$ . Or la série  $\sum \frac{t^n}{n!}$  converge, donc  $\sum f_n(t)$  converge absolument, donc converge.

On a donc vérifié la convergence simple de  $\sum f_n$  sur  $[0, +\infty[$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $g_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $t^2 g_n(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $g_n(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Or  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc  $g_n$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  donc sur  $[0, +\infty[$ .

On pose alors  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ .

En effectuant une intégration par parties, on prouve que  $I_n = n I_{n-1}$ . On en déduit par récurrence que

$I_n = n! I_0 = n!$ . Alors  $t \mapsto |f_n(t)|$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  car  $|f_n(t)| = \frac{|a_n|}{n!} g_n(t)$  et on a  $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$ .

- (b) On utilise le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

**H1**  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$  et a pour somme  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  d'après 1.(b) dont on a admis la continuité sur  $[0, +\infty[$ .

**H2**  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  d'après la question 2.(a)

**H3**  $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$  terme général de série convergente par hypothèse.

Alors  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et on a

$$\int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Exercice 50 : Analyse**

On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$ .

1. Prouver que  $F$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .
2. Prouver que  $x \mapsto xF(x)$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de  $+\infty$ , de  $F(x)$ .

1. Notons  $f : \begin{cases} ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$

On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

**H1**  $\forall t \in ]0; +\infty[, x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-2t}}{x+t}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

**H2**  $\forall x \in ]0; +\infty[, t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

**H3 Domination sur tout segment** Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0; +\infty[$ .  $\forall x \in [a, b], \forall t \in ]0; +\infty[$ ,

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-2t} = \varphi(t)$$

avec  $\varphi$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $]0; +\infty[$  car  $2 > 0$ .

On en déduit que  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .

2.  $\forall x \in ]0; +\infty[, xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-2t} dt$ . Posons  $\forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in ]0; +\infty[, h_x(t) = \frac{x}{x+t} e^{-2t}$ .

On utilise l'extension du théorème de convergence dominée appliquée à  $(h_x)_{x \in ]0; +\infty[}$  :

**H1**  $\forall t \in ]0; +\infty[, h_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-2t} = h(t)$ .

**H2** Toutes les fonctions  $h_x$  et la fonction  $h$  sont continues par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

**H3 Domination globale**  $\forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in ]0; +\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t} = h(t)$  et  $h$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

Donc  $\int_0^{+\infty} h_x(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$ .

Conclusion :  $x F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

3. Et donc  $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ .

**Autre méthode** (mais qui n'est pas attendue ici) : le changement de variable  $u = x + t$  donne  $F(x) = e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du$  ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de  $u \mapsto \frac{e^{-2u}}{u}$  valant  $u \mapsto -\frac{2u+1}{u^2} e^{-2u}$ , on « remarque » que

$$\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u},$$

donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u} du = e^{2x} \left[ -\frac{e^{-2u}}{2u} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ou alors on effectue une intégration par parties et on utilise un théorème d'intégration de  $o$  dans le cas de convergence.

D'où en particulier  $x F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

**Exercice 51 : Analyse**

1. Montrer que la série  $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$  converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de  $x \mapsto \text{Arcsin } x$  ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ .

1. On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} > 0$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

Ainsi,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} < 1$ . Donc, d'après la règle de d'Alembert,  $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

2. D'après le cours,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \mapsto (1+u)^\alpha$  est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence  $R$  de son développement en série entière vaut 1 si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . De plus,

$$\forall u \in ]-1, 1[, (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n.$$

En particulier, pour  $\alpha = -\frac{1}{2}$  et  $u = -t, R = 1$  et  $\forall t \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-(2n-1))}{2^n n!} (-t)^n.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par  $2 \cdot 4 \cdots 2n = 2^n n!$ , on obtient

$$\forall t \in ]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

Conclusion :  $\boxed{R = 1 \text{ et } \forall t \in ]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n.}$

3. D'après la question précédente, en remarquant que  $x \in ]-1, 1[ \iff t = x^2 \in [0, 1[$  et  $[0, 1[ \subset ]-1, 1[$ , il vient

$$\forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

avec un rayon de convergence  $R = 1$ .

Or Arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  avec  $\text{Arcsin}' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  et le rayon de convergence est conservé. On obtient

$$\boxed{\forall x \in ]-1, 1[, \text{Arcsin } x = \underbrace{\text{Arcsin } 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}}$$

avec un  $\boxed{\text{rayon de convergence } R = 1.}$

4. Prenons  $x = \frac{1}{2} \in ]-1, 1[$  dans le développement précédent. On en déduit que

$$\frac{\pi}{6} = \text{Arcsin} \left( \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}$$

Donc  $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)} = \frac{\pi}{3}.}$



**Exercice 52 : Analyse**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Prouver que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. (a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .  
(a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.  
(b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.  
(c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

1. L'inégalité à démontrer est équivalente à  $(x - y)^2 \geq 0$ , ce qui est bien vrai.
2. (a) En particulier, si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $x^2 + y^2 - xy > 0$  donc  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^2$ .  
(b)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opération. Pour que  $f$  soit continue en  $(0, 0)$ , il faut que  $\alpha$  soit la limite de  $f$  en  $(0, 0)$ .  
Or, avec l'inégalité de la question 1, si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $0 \leq f(x, y) \leq \frac{2y^4}{x^2 + y^2} \leq 2y^2 \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 2y^2$  donc  $f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \alpha = 0$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Remarque : on aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires pour calculer la limite de  $\frac{2y^4}{x^2 + y^2} (\leq 2r^2)$ .

3. (a) Les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations.

On trouve après calcul, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^4(y - 2x)}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^3(2y^2 - 3xy + 4x^2)}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$

- (b)
  - L'application partielle  $f_x : x \mapsto f(x, 0)$  vaut 0 que  $x$  soit nul ou non, donc  $f_x : x \mapsto 0$ .  
Donc  $f'_x(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et vaut  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .
  - L'application partielle  $f_y : y \mapsto f(0, y)$  vaut  $y^2$  lorsque  $y \neq 0$  et 0 sinon, donc  $f_y : y \mapsto y^2$ .  
Donc  $f'_y(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et vaut  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

- (c) Par opérations,  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Analysons la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$  : on a vu que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

On calcule, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , avec la question 1,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{4y^4 |y - 2x|}{x^2 + y^2} \leq \frac{4y^2 (x^2 + y^2) |y - 2x|}{x^2 + y^2} = 4y^2 |y - 2x| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{4y^3 |2y^2 - 3xy + 4x^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{4y (x^2 + y^2) |2y^2 - 3xy + 4x^2|}{x^2 + y^2} = 4y |2y^2 - 3xy + 4x^2| \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$$

donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ .

Finalement,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Remarque : on aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires pour calculer les limites de  $\frac{4y^4 |y - 2x|}{x^2 + y^2} (\leq 12r^3)$  et  $\frac{4y^3 |2y^2 - 3xy + 4x^2|}{x^2 + y^2} (\leq 36r^3)$ .



**Exercice 53 : Analyse**

**Exercice 54 : Analyse**

**Exercice 55 : Analyse**

**Exercice 56 : Analyse**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ .

- $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Si oui, les déterminer.
- $f$  admet-elle des extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.
- On pose  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ . Justifier, oralement, que  $f$  admet un maximum global sur  $K$  puis le déterminer.

1. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  car polynomiale, et comme  $\mathbb{R}^2$  est ouvert, si elle admet un extremum local, c'est en un point critique.

Or on calcule, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y$ .

Les points critiques de  $f$  sont les couples  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $x = y$  et  $6x^2 + 6x = 0$ , il s'agit donc des couples  $(0, 0)$  et  $(-1, -1)$ .

Comme  $f$  est même de classe  $\mathcal{C}^2$ , on peut calculer la hessienne en ces points.

Or, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6$ .

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$  a un déterminant strictement négatif, donc  $(0, 0)$  est un point selle.
- $H_f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$  a un déterminant strictement positif, donc

$f$  présente un extremum local en  $(-1, -1)$ .

Comme, de plus, sa trace est strictement négative,  $\text{Sp}(H_f(-1, -1)) \subset \mathbb{R}_-^*$  et

il s'agit d'un maximum local, valant  $f(-1, -1) = 3$ .

De plus,  $f$  n'admet ni minimum local, ni maximum local autre que celui en  $(-1, -1)$ .

- Comme  $f(x, 0) = 2x^3 + 2$  a des limites  $\pm\infty$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $f$  ne peut admettre d'extremum global.
- $K = [0, 1] \times [0, 1]$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  en tant que produit cartésien de deux compacts, ou bien encore de fermé borné en dimension finie.  
Comme  $f$  est continue sur  $K$ , le théorème des bornes atteintes assure l'existence d'un maximum global de  $f$  sur  $K$ .  
S'il est atteint en un point de l'ouvert  $\overset{\circ}{K}$ , c'est en un point critique. Or  $\overset{\circ}{K} = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  donc  $\{(0, 0), (-1, -1)\} \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$ .  
C'est donc sur le bord de  $K$  qu'il est atteint.  
Découpons ce bord  $\partial K$  en quatre morceaux :  $\partial K_1 = [0, 1] \times \{0\}, \partial K_2 = \{1\} \times [0, 1], \partial K_3 = [0, 1] \times \{1\}, \partial K_4 = \{0\} \times [0, 1]$ .  
**Le bord  $\partial K_1$**  se paramètre en  $x \in [0, 1]$  et  $y = 0$ . Or,  $g_1 : x \mapsto f(x, 0) = 2x^3 + 2$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et atteint un maximum en  $x = 1$  valant  $f(1, 0) = 4$ .  
**Le bord  $\partial K_2$**  se paramètre en  $x = 1$  et  $y \in [0, 1]$ . Or,  $g_2 : y \mapsto f(1, y) = 4 + 6y - 3y^2 = 7 - 3(y - 1)^2$  atteint un maximum en  $y = 1$  valant  $f(1, 1) = 7$ . On aurait aussi pu faire l'étude de la fonction  $g_2$ .  
**Le bord  $\partial K_3$**  se paramètre en  $x \in [0, 1]$  et  $y = 1$ . Or,  $g_3 : x \mapsto f(x, 1) = 2x^3 + 6x - 1$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et  $g_3' : x \mapsto 6x^2 + 6 > 0$ , donc  $g_3$  est strictement croissante sur  $[0, 1]$  et atteint un maximum en 1 valant  $f(1, 1) = 7$ .  
**Le bord  $\partial K_4$**  se paramètre en  $x = 0$  et  $y \in [0, 1]$ . Or,  $g_4 : y \mapsto f(0, y) = 2 - 3y^2$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$  et atteint un maximum en 0 valant  $f(0, 0) = 2$ .

Finalement, le maximum global de  $f$  vaut 7 (et il atteint un un point unique :  $(1, 1)$ ).

**Exercice 57 : Analyse****Exercice 58 : Analyse**



## ALGÈBRE : EXERCICES 59 À 94

Exercice 59 : Algèbre

Exercice 60 : Algèbre

**Exercice 61 : Algèbre**

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes.

Pour  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose

$$\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|.$$

1. Prouver que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

2. Démontrer que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|.$$

Puis, démontrer que, pour tout entier  $p \geq 1$ ,

$$\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p.$$

3. Démontrer que, pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la série  $\sum \frac{A^p}{p!}$  est absolument convergente. Est-elle convergente ?

1. Il s'agit de la norme infini sur  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

**Bonne définition** Le maximum étant pris sur un ensemble fini, il n'y a pas de problème de définition.

**Séparation** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $\|A\| = 0$ , alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $|a_{i,j}| = 0 = a_{i,j}$  donc  $A = 0_n$ .

**Homogénéité** Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , comme  $|\lambda| \geq 0$ ,

$$\|\lambda A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (|\lambda| |a_{i,j}|) = |\lambda| \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}| = |\lambda| \cdot \|A\|.$$

**Inégalité triangulaire** Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$$

donc  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .

2. Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$|[AB]_{i,j}| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n (\|A\| \cdot \|B\|) = n \|A\| \cdot \|B\|$$

donc  $\|AB\| \leq n \|A\| \cdot \|B\|$ .

On montre que pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$  par récurrence (si l'interrogateur insiste pour qu'elle soit posée) :

**Initialisation** Pour  $p = 1$ , il n'y a rien à faire. Le cas  $p = 2$  découle de ce qui précède avec  $A = B$ .

**Hérédité** Soit  $p \geq 1$  tel que  $\|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$ . Alors, en utilisant l'inégalité précédente avec  $B = A^p$ ,

$$\|A^{p+1}\| = \|A \times A^p\| \leq n \|A\| \cdot \|A^p\| \leq n^p \|A\|^{p+1}$$

par hypothèse de récurrence, ce qui établit la récurrence.

3. On en déduit que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \left\| \frac{A^p}{p!} \right\| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{(n \|A\|)^p}{p!}$  qui est un terme général positif de série (exponen-

tielle) convergente (vers  $\frac{\exp(n \|A\|)}{n}$ ), donc  $\sum \frac{A^p}{p!}$  est absolument convergente par comparaison de terme généraux positifs de séries convergentes.

On peut aussi utiliser une norme d'algèbre, par exemple une norme subordonnée, pour laquelle  $N(A^p) \leq N(A)^p$  pour conclure.

Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension finie, la converge absolue implique la convergence de la série  $\sum \frac{A^p}{p!}$ .

**Exercice 62 : Algèbre**

**Exercice 63 : Algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ . On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .  
 Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $u^*$  l'adjoint de  $u$ .

1. Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant  $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$  est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i.  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .
- ii.  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ .
- iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ .

1. La réponse est négative.

- Il suffit de considérer la rotation plane de centre  $(0,0)$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . C'est, par définition, un endomorphisme tel que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, u(x, y) \perp (x, y)$  : une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  transforme un vecteur en un vecteur qui lui est orthogonal.
- Si on préfère faire des calculs, on peut se placer dans le plan complexe. Alors l'écriture d'une telle rotation est, en notant  $(x', y') = u(x, y)$ ,

$$x' + iy' = e^{i\frac{\pi}{2}}(x + iy) = i(x + iy) = -y + ix$$

Donc

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

ce qui redonne la linéarité de  $u$  et le fait que  $(u(x, y)|(x, y)) = x'x + y'y = -xy + xy = 0$ .

- Si on préfère utiliser des matrices, on représente  $u$  dans la base canonique par la matrice de rotation

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve alors le fait que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

et on a de nouveau  $(u(x, y)|(x, y)) = x'x + y'y = -xy + xy = 0$ .

2. Le plus efficace consiste à démontrer le cycle d'implications

$$\boxed{\text{i.} \Rightarrow \text{iii.} \Rightarrow \text{ii.} \Rightarrow \text{i.}}$$

**i.  $\Rightarrow$  iii.** On suppose  $u \circ u^* = u^* \circ u$ . Soit  $x \in E$ .

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) \stackrel{\text{definition de } u^*}{=} (x|u^*(u(x))) \stackrel{\text{i.}}{=} (x|u(u^*(x))) \stackrel{\text{definition de } u^*}{=} (u^*(x)|u^*(x)) = \|u^*(x)\|^2.$$

**iii.  $\Rightarrow$  ii.** On suppose  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ . Soit  $(x, y) \in E^2$ . En utilisant les identités de polarisation et la linéarité de  $u$  et  $u^*$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} \left( \|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left( \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \right) \\ &\stackrel{\text{iii.}}{=} \frac{1}{4} \left( \|u^*(x+y)\|^2 - \|u^*(x-y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|u^*(x) + u^*(y)\|^2 - \|u^*(x) - u^*(y)\|^2 \right) = (u^*(x)|u^*(y)) \end{aligned}$$

**ii.  $\Rightarrow$  i.** On suppose  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$ . Soit  $x \in E$  On a

$$u^* \circ u(x) = u \circ u^*(x) \iff u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x) = 0_E \iff u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x) \in \{0_E\} = E^\perp.$$

Calculons donc, pour  $y \in E$ ,

$$(u^* \circ u(x) - u \circ u^*(x)|y) = (u^* \circ u(x)|y) - (u \circ u^*(x)|y) \stackrel{\text{definition de } u^*}{=} (u(x)|u(y)) - (u^*(x)|u^*(y)) \stackrel{\text{ii.}}{=} 0_{\mathbb{R}}$$

Remarque : lorsque c'est le cas, on dit que  $u$  est un **endomorphisme normal**.

**Exercice 64 : Algèbre****Exercice 65 : Algèbre**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K}$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

1. Démontrer que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

2. (a) Démontrer que

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

(b) Démontrer que, pour tout  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ ,

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \implies (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Écrire le polynôme caractéristique de  $A$ , puis en déduire que le polynôme

$$R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X \text{ est un polynôme annulateur de } A.$$

1. Notons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $Q = \sum_{\ell=0}^m b_\ell X^\ell$ . Alors,  $u$  étant linéaire,

$$\boxed{(PQ)(u)} = \left( \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq m}} a_k b_\ell X^{k+\ell} \right) (u) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq m}} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \sum_{k=0}^n a_k \left( \sum_{\ell=0}^m b_\ell u^k \circ u^\ell \right) = \sum_{k=0}^n a_k u^k \circ \left( \sum_{\ell=0}^m b_\ell u^\ell \right) = \boxed{P(u) \circ Q(u)}$$

2. (a)  $\boxed{P(u) \circ Q(u)} = (PQ)(u) = (QP)(u) = \boxed{Q(u) \circ P(u)}$  en utilisant la question précédente et la commutativité sur  $\mathbb{K}[X]$ .

(b) Si  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

3. On a  $\boxed{\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A = X^2 - X = X(X-1)}$ .

Or 0 et 1 sont racines de  $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$  donc  $\chi_A = X(X-1)$  divise  $R$ .

En outre, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\chi_A$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

D'après la question précédente,  $\boxed{\text{c'est aussi le cas de } R}$ .

**Exercice 66 : Algèbre**

1. Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Prouver que  $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp } A \subset [0, +\infty[$ .

2. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

3. Prouver que  $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}),$

$$AB = BA \implies A^2B \in S_n^+(\mathbb{R}).$$

4. Soit  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Prouver qu'il existe  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ .

1. ■ Supposons  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$  et donnons-nous  $\lambda \in \text{Sp } A$  (le théorème spectral assure que toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles) et  $X \neq 0$  un vecteur propre associé.

Alors  $0 \leq X^T A X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$  avec  $\|X\|^2 > 0$ , donc  $\lambda \geq 0$ .

■ Supposons  $A \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}^+$ . Par théorème spectral, on a  $P \in \mathcal{O}(n)$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où  $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$  telles que  $A = P D P^{-1} = P D P^T$ .

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On pose  $Y = P^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

$$X^T A X = X^T (P D P^T) X = (P^T X)^T D (P^T X) = Y^T D Y = (y_1 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$$

donc  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

2. Supposons  $A \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\text{Sp } A \subset \mathbb{R}^+$ . Par théorème spectral, on a  $P \in \mathcal{O}(n)$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où  $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$  telles que  $A = P D P^{-1} = P D P^T$ . Alors

$$A^2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} P^T$$

est **symétrique** grâce à la deuxième forme et **positive** grâce à la première car ses valeurs propres sont les  $\lambda_i^2 \geq 0$ .

3. Supposons  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , et  $B \in S_n^+(\mathbb{R})$  telles que  $AB = BA$ . Alors

$$(A^2 B)^T = B^T (A^T)^2 = B A^2 = A^2 B$$

donc  $A^2 B$  est symétrique. Et si  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X^T A^2 B X = X^T A^T B A X = Y^T B Y \geq 0$$

où on a posé  $Y = A X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et utilisé la symétrie de  $A$ , la commutation de  $A$  et  $B$  et la positivité de  $B$ .

On a donc bien  $A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$ .

4. Supposons  $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ . Par théorème spectral, on a  $P \in \mathcal{O}(n)$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où  $\text{Sp } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$  telles que  $A = P D P^{-1} = P D P^T$ .

$$B = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^T$$

est **symétrique** grâce à la deuxième forme et **positive** grâce à la première car ses valeurs propres sont les  $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ , et vérifie  $B^2 = A$ .

**Exercice 67 : Algèbre**



**Exercice 68 : Algèbre**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que  $A$  est diagonalisable de quatre manières :
  - (a) sans calcul,
  - (b) en calculant directement le déterminant  $\det(\lambda I_3 - A)$ , où  $I_3$  est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
  - (c) en utilisant le rang de la matrice,
  - (d) en calculant  $A^2$ .
2. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A$ . Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

1. (a)  $A$  étant symétrique réelle, elle est (ortho)diagonalisable par théorème spectral.

(b) À l'aide des opérations  $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$  puis  $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$ , on obtient

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 3-\lambda & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-3 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3)$$

donc  $\text{Sp } A = \{0, 3\}$  et 3 est une valeur propre simple, donc le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

La diagonalisabilité est donc équivalente au fait que le sous-espace propre  $E_0(A)$  soit de dimension 2.

On remarque que  $\text{rg } A = 1$  car  $0 \neq C_1 = -C_2 = C_3$  donc  $\dim E_0(A) = 3 - 1 = 2$ .

Ainsi,  $\dim E_0(A) + \dim E_3(A) = 2 + 1 = 3$  donc  $A$  est diagonalisable.

On pourrait s'arrêter là mais le sujet demande de déterminer complètement les sous-espaces propres.

Reprenons :  $\dim E_0(A) = 2$  et  $C_1 + C_2 = -C_1 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs non colinéaires de  $E_0(A)$  donc

$E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Une solution alternative consiste à résoudre

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y + z = 0 \iff x = y - z \text{ ce qui permet de retrouver la base.}$$

Puis  $E_3(A)$  est de dimension 1 car la valeur propre 3 est simple et  $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$  et donc  $C_1 - C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donne un vecteur non nul  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(A)$  donc  $E_3(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ .

Une solution alternative consiste à résoudre avec un pivot de Gauß

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \iff (A - 3I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = -y = z$$

ce qui permet de retrouver la base.

(c) On reprend  $\text{rg } A = 1$  comme vu précédemment donc 0 est valeur propre et  $\dim E_0(A) = 3 - 1 = 2$ .

Il manque une deuxième valeur propre  $\lambda$ , 0 étant valeur propre d'ordre au moins 2.

Quitte à se placer dans  $\mathbb{C}$  pour s'assurer que le polynôme caractéristique soit scindé (feignons de ne pas l'avoir encore calculé et de ne plus connaître le théorème spectral qui dit que les valeurs propres de  $A$  sont toutes réelles),  $\text{tr } A = 0 + 0 + \lambda = 3$  donc 3 est une valeur propre (réelle, donc) de  $A$ , nécessairement simple car la dimension de  $E_3(A)$  ne peut dépasser 1 et donc  $A$  est diagonalisable.

(d) On calcule  $A^2 = 3A$  donc  $P = X^2 - 3X = X(X - 3)$  est un polynôme simplement scindé annulateur de  $A$  donc  $A$  est diagonalisable.

2. D'après le théorème spectral, les sous-espaces propres étant deux à deux orthogonaux, il suffit de choisir une base orthonormale de chaque sous-espace propre. Pour  $E_3(A)$ , c'est facile, il suffit de normer le seul vecteur de base trouvé et on obtient  $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

On peut ensuite normer un premier vecteur de  $E_0(A)$  :  $e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  puis

- obtenir un vecteur (directement) orthogonal aux deux premiers (donc toujours dans  $E_0(A)$ ) et normé en calculant  $e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ . (Rappel : le produit vectoriel est au programme en Physique!)
- obtenir un deuxième vecteur de  $E_0(A)$  formant une base orthonormale de  $E_0(A)$  en utilisant Gram-Schmidt : on pose  $e_2 = (1, 1, 0)$  puis  $e_3 = (-1, 0, 1) + \lambda e_2$  avec  $\lambda$  tel que  $e_3 \perp e_2$ . On trouve  $\lambda = \frac{1}{2}$  puis  $e_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$  et on retrouve  $e_2$  et  $e_3$  en normant les vecteurs.



Exercice 69 : Algèbre

Exercice 70 : Algèbre

Exercice 71 : Algèbre

Exercice 72 : Algèbre

Exercice 73 : Algèbre

Exercice 74 : Algèbre

Exercice 75 : Algèbre

**Exercice 76 : Algèbre**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté  $(\cdot | \cdot)$ .

On pose  $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.  
 (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit  $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$ . Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure  $m$  et déterminer la valeur de  $m$ .

1. (a) On montre que pour tout  $(x, y) \in E^2, |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$  ie  $(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y)$ .

Soit  $\lambda$  un nombre réel. On pose  $P(\lambda) = (x + \lambda y | x + \lambda y) = \|x + \lambda y\|^2$  : on a que  $P(\lambda) \geq 0$  par positivité. Or, par bilinéarité (ou identité remarquable sur la norme)

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y) \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

$P$  est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

**Cas 1** : Si  $\|y\|^2 = (y|y) = 0$ , alors on doit avoir, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}, (x|x) + 2\lambda(x|y) \geq 0$ , ce qui n'est possible que si  $(x|y) = 0$  (en effet, cela se voit en faisant tendre  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  si  $(x|y) \neq 0$  ce qui aboutit à une contradiction ou en reconnaissant une équation de droite dont les ordonnées seraient toutes positive, elle est donc horizontale et de coefficient directeur nul) et l'inégalité est vraie. Cette preuve a l'avantage d'être valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive.

On peut aussi plus simplement utiliser la défini-positivité du produit scalaire :  $y = 0_E$  et donc l'inégalité s'écrit  $0 = 0$ .

**Cas 2** : Sinon, le polynôme en  $\lambda$  est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$$

et on obtient l'inégalité recherchée.

Si on n'est pas familier avec le discriminant réduit, on peut utiliser le discriminant classique

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0.$$

- (b) Il y a égalité si et seulement si  $(x, y)$  est une famille liée.

En effet

- Si  $y = 0_E$ , il y a égalité.
- Si  $y \neq 0_E$ , il y a égalité si et seulement si  $P(\lambda)$  admet une racine (double) si et seulement si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, (x + \lambda y | x + \lambda y) = 0$ , ce qui équivaut à  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y = 0$  et donc  $x$  et  $y$  sont liés.

2.  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$  est bien un produit scalaire sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, si  $f \in E, \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  et

$$(b-a)^2 = \left( \int_a^b 1 dt \right)^2 = \left( \int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}} dt \right)^2 \leq \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$$

donc  $(b-a)^2$  est un minorant de  $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ , atteint pour  $f \equiv 1$ , donc  $m = (b-a)^2$  (qui est même un minimum en plus d'une borne inférieure.)

**Exercice 77 : Algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien.

1. Soit  $A$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Démontrer que  $(A^\perp)^\perp = A$ .

2. Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

(a) Démontrer que  $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .

(b) Démontrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

1. Si  $x \in A^\perp$  et  $a \in A$ , alors  $(x|a) = 0$ , donc  $A \subset (A^\perp)^\perp$ .

Comme  $A$  et  $A^\perp$  sont de dimension finie,  $A \oplus A^\perp = E$  et  $A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp = E$  donc

$$\dim(A^\perp)^\perp = \dim E - \dim A^\perp = \dim A$$

Finalement,  $(A^\perp)^\perp = A$ .

2. (a) ■ Comme  $F \subset F+G$  et  $G \subset F+G$ , on a déjà  $(F+G)^\perp \subset F^\perp$  et  $(F+G)^\perp \subset G^\perp$  donc  $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ .  
 ■ Si  $x \in F^\perp \cap G^\perp$ ,  $y \in F$  et  $z \in G$ , alors

$$\underbrace{(x|y+z)}_{\in F^\perp \cap G^\perp \subset F^\perp} = \underbrace{(x|y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{(x|z)}_{\in G^\perp} = 0$$

donc  $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$ .

■ Finalement,  $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .

*Remarque : Cette égalité et cette démonstration sont encore valables en dimension infinie.*

(b) En appliquant la question précédente à  $F^\perp$  et  $G^\perp$  et en utilisant la première question,

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G$$

donc, en prenant l'orthogonal et en réutilisant la première question,  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

*Remarque : Une seule inclusion reste vraie en dimension infinie.*

**Exercice 78 : Algèbre**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

On note  $(x|y)$  le produit scalaire de  $x$  et de  $y$  et  $\| \cdot \|$  la norme euclidienne associée.

- Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .
  - Démontrer que  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
  - Démontrer que  $u$  est bijectif.
- Démontrer que l'ensemble  $\mathcal{O}(E)$  des isométries vectorielles de  $E$ , muni de la loi  $\circ$ , est un groupe.
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ .  
Prouver que  $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

1. (a) Si  $u$  est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$ ,

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} \left( \|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right) \quad (\text{car } u \text{ conserve la norme}) \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

- (b) Comme  $E$  est de dimension finie, il suffit de vérifier que  $u$  est injectif pour obtenir automatiquement que  $u$  est bijectif. Or

$$x \in \text{Ker } u \iff u(x) = 0_e \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0_E$$

car  $u$  conserve la norme, ce qui donne  $\text{Ker } u = \{0_E\}$  donc  $u$  injectif, donc  $u$  bijectif.

2. On montre que  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ .

- D'après la question précédente,  $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$ .
- $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$  car  $\text{id}_E$  est un endomorphisme qui conserve la norme.
- Soit  $u, v \in \mathcal{O}(E)$ . Alors  $u \circ v^{-1} \in \mathcal{L}(E)$  et pour tout  $x \in E$ ,

$$\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|u(v^{-1}(x))\| \stackrel{u \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v^{-1}(x)\| \stackrel{v \in \mathcal{O}(E)}{=} \|v(v^{-1}(x))\| = \|x\|$$

donc  $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ .

3. ■ Supposons  $u \in \mathcal{O}(E)$ . Alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , la conservation du produit scalaire donnée en 1.a permet d'écrire

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

donc la famille  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est orthonormale donc libre et contient  $n = \dim E$  vecteurs : c'est une base orthonormée de  $E$ .

- Supposons que la famille  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ .

Alors, pour tout  $x \in E$ , en décomposant  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  donc  $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$ , comme  $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$  est une base orthonormée de  $E$ ,

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

et comme  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ ,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Donc  $\|u(x)\| = \|x\|$  et on a bien  $u \in \mathcal{O}(E)$ .

**Exercice 79 : Algèbre**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

1. Soit  $h$  une fonction continue et positive de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que  $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$ .

2. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose  $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ . Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

3. Majorer  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Supposons  $\int_a^b h(x)dx = 0$ . Soit  $H$  une primitive de la fonction continue  $h$ . Alors  $H' = h \geq 0$  donc  $H$  est croissante

et  $H(b) - H(a) = \int_a^b h(x)dx = 0$  donc  $H$  est constante sur  $[a, b]$  :  $\forall x \in [a, b], H(a) \leq H(x) \leq H(b) = H(a)$ .

Alors, sur  $[a, b], h = H' \equiv 0$ .

Donc  $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$ .

2. **Bonne définition** Si  $f, g \in E$ , le réel  $(f|g)$  est bien défini.

**Symétrie** Si  $f, g \in E, (f|g) = (g|f)$  par commutativité du produit réel.

**Bilinéarité** Si  $f_1, f_2, g \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}, (f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$  par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.

**Défini-positivité**

- Si  $f \in E, (f|f) \geq 0$  par positivité de l'intégrale ;
- et si  $(f|f) = 0$ , alors, comme  $f^2$  est continue, positive, d'intégrale nulle sur  $[a, b]$ , elle y est nulle et donc  $f = 0_E$ .

Donc  $(\cdot|\cdot)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

3. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, en notant  $f = \sqrt{\cdot}$  et  $g : x \mapsto e^{-x}$  fonctions continues sur  $[0, 1]$ ,

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = (f|g) \leq \|f\| \|g\| = \sqrt{\int_0^1 x dx} \sqrt{\int_0^1 e^{-2x} dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{\sqrt{2}}$$

donc  $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx \leq \frac{\sqrt{1-e^{-2}}}{2}$ .

**Exercice 80 : Algèbre**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Démontrer que  $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

2. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ .

Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

1. **Bonne définition** Si  $f, g \in E$ , elles sont continues sur  $[0, 2\pi]$  et le réel  $(f|g)$  est bien défini.

**Symétrie** Si  $f, g \in E$ ,  $(f|g) = (g|f)$  par commutativité du produit réel.

**Bilinéarité** Si  $f_1, f_2, g \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$  par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.

**Défini-positivité**

- Si  $f \in E$ ,  $(f|f) \geq 0$  par positivité de l'intégrale ;
- et si  $(f|f) = 0$ , alors, comme  $f^2$  est continue, positive, d'intégrale nulle sur  $[0, 2\pi]$ , elle y est nulle et donc, par  $2\pi$ -périodicité,  $f = 0_E$ .

2.  $F = \text{Vect}(f : x \mapsto \cos x, g : x \mapsto \cos(2x))$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie donc le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$  est bien défini.

Il s'agit de l'unique fonction  $h \in F$  telle que  $u - h \in F^\perp$ .

Or, par une célèbre formule de trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad \text{ie} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\text{donc } u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \frac{1}{2}.$$

Vérifions alors que la fonction constante  $\frac{1}{2}$  est dans  $F^\perp$ .

$$\left(\frac{1}{2} \middle| f\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{1}{4\pi} [\sin t]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} \middle| g\right) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\text{Donc } u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in F^\perp} \quad \text{et} \quad \boxed{p_F(h) = -\frac{g}{2}}.$$

**Exercice 81 : Algèbre**

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par :  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$ , où  $\text{tr}(A^T A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^T$  par la matrice  $A'$ . On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

1. Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
3. Déterminer la projection orthogonale de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
4. Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

On a classiquement  $\varphi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

1.  $\mathcal{F} = \text{Vect} \left( I_2, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Comme  $\mathcal{F}$  est un sous-espace de dimension 2 ( $I_2$  et  $K$  sont non colinéaires) en dimension 4,  $\mathcal{F}^\perp$  est aussi de dimension 2.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp$  si et seulement si  $\varphi(A, I_2) = \varphi(A, K) = 0$  si et seulement si  $a + d = 0 = b - c$ .

Donc  $\mathcal{F}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  et comme  $M$  et  $N$  ne sont pas colinéaires,

$\left( M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .

3. Comme  $J = I_2 + N$  avec  $I_2 \in \mathcal{F}$  et  $N \in \mathcal{F}^\perp$ ,  $p_{\mathcal{F}^\perp}(J) = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

4. D'après le cours (et le théorème de Pythagore),  $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\| = \|N\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2}$  donc  $d(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}$ .



**Exercice 82 : Algèbre**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ .

On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

- Démontrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

1. **Bonne définition** Si  $A, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , le réel  $(A|A')$  est bien défini sans problème.

**Symétrie** Si  $A, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $(A|A') = (A'|A)$  par commutativité du produit réel.

**Bilinéarité** Si  $A_1, A_2, A' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(A_1 + \lambda A_2|A') = (A_1|A') + \lambda(A_2|A')$  en remplaçant directement dans l'expression. D'où la linéarité à gauche, la linéarité à droite en découle par symétrie.

**Défini-positivité**

- Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $(A|A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ ;
- et si  $(A|A) = 0$ , alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs,  $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0$  et donc  $A = 0_2$ .

2. On écrit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  où  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^\perp$  car elle est orthogonale à toute matrice triangulaire supérieure.

$$\text{Alors } d(A, F) = \left\| A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

**Exercice 83 : Algèbre****Exercice 84 : Algèbre****Exercice 85 : Algèbre****Exercice 86 : Algèbre****Exercice 87 : Algèbre**

**Exercice 88 : Algèbre**

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  
Prouver que si  $P$  annule  $u$  alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ . On pose  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  la matrice de  $E$  définie par  $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  défini par :  $\forall M \in E, u(M) = M + \text{tr}(M)A$ .

- (a) Prouver que le polynôme  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .  
(b)  $u$  est-il diagonalisable ?

Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

1. Notons  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  tel que  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ ,  $x \neq 0_E$  vecteur propre associé. Alors

$$0_E = P(u)(x) = \sum_{k=0}^n a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n a_k (\lambda^k x) = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) x = P(\lambda)x.$$

Comme  $x \neq 0$ ,  $P(\lambda) = 0$ .

Remarque :  $u(x) = \lambda x \implies \forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$  se prouve facilement par récurrence.

2. (a) Soit  $M \in E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} u^2(M) - 2u(M) + M &= u(M + (\text{tr } M)A) - 2(M + (\text{tr } M)A) + M \\ &= u(M) + (\text{tr } M)u(A) - M - 2(\text{tr } M)A \\ &= M + (\text{tr } M)A + (\text{tr } M)A - M - 2(\text{tr } M)A && \text{car } \text{tr } A = 0 \\ &= 0_n \end{aligned}$$

Donc  $X^2 - 2X + 1$  est annulateur de  $u$ .

- (b) ■ D'après les deux questions précédentes, la seule valeur propre possible de  $u$  est 1.  
Si  $u$  était diagonalisable, on aurait alors  $E = E_1(u) = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$  donc  $u = \text{id}_E$ . On peut aussi le voir en représentant  $u$  matriciellement :  $B = P \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = P I_n P^{-1} = I_n$ .  
Ce n'est pas le cas par exemple parce que  $u(I_n) = I_n + nA \neq I_n$ .
- On peut aussi s'intéresser au polynôme minimal de  $u$  : il divise  $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$  et n'est pas constant, il vaut donc  $X-1$  ou  $(X-1)^2$ .  
Mais comme  $u \neq \text{id}_E$ , il ne peut valoir  $X-1$ .  
Donc  $\pi_u = (X-1)^2$  n'est pas simplement scindé et  $u$  n'est pas diagonalisable.

**Exercice 89 : Algèbre****Exercice 90 : Algèbre**

**Exercice 91 : Algèbre**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice  $A$  est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de  $A$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $(X-1)^2$  et en déduire la valeur de  $A^n$ .

1. On remarque que la somme des colonnes de  $A$  est égale à  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , on devine que la seule valeur propre va être 1.

On peut répéter cette opération dans le calcul de  $\chi_A$  :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 1 \\ \lambda-1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

en ayant ensuite retranché la première ligne aux deux autres.

On en déduit que  $\chi_A = (X-1)^3$  et  $\text{Sp } A = \{1\}$ .

On peut aussi conclure en remarquant que  $A^2 = 2A - I_n$  et que les valeurs propres sont alors racines de  $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ .

2. Comme  $0 \notin \text{Sp } A$ ,  $A$  n'est pas inversible.

Si elle était diagonalisable, elle serait égale à  $P I_3 P^{-1} = I_3$  donc elle n'est pas diagonalisable.

3. Si on a déjà vu dans la première question que  $(X-1)^2$  est un polynôme annulateur, on dit que  $\pi_A$  est un polynôme unitaire non constant divisant  $(X-1)^2$  et qu'il ne peut valoir  $X-1$  car  $A \neq I_3$  ce qui permet de conclure  $\pi_u = (X-1)^2$ .

Sinon, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton :  $\chi_A$  annule  $A$  donc est divisible par  $\pi_A$  qui peut alors valoir  $X-1$ ,  $(X-1)^2$  ou  $(X-1)^3$ . On élimine comme  $X-1$  car  $A \neq I_3$  et on calcule  $(A-I_3)^2 = 0_3$  ce qui permet de conclure que  $\pi_u = (X-1)^2$ .

4. Par division euclidienne,  $X^n = (X-1)^2 Q + R$  où  $\deg R < 2$  donc  $R = aX + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

En évaluant en 1, on tire  $1^n = 1 = R(A) = a + b$ .

En dérivant puis évaluant en  $1-1$  est racine double de  $(X-1)^2$  - on obtient  $n1^{n-1} = R'(1) = b$ .

Donc  $b = n$ ,  $a = 1 - n$  et  $R = (1-n)X + n$ .

En évaluant la division euclidienne en  $A$ , on tire  $A^n = \pi_A(A)Q(A) + R(A) = R(A) = (1-n)A + nI_3$ .

**Exercice 92 : Algèbre**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$ .

On pose  $\forall (A, B) \in E^2$ ,  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$  où  $\text{tr}$  désigne la trace et  $A^T$  désigne la transposée de la matrice  $A$ .

1. Prouver que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. On note  $S_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$ .  
Une matrice  $A$  de  $E$  est dite antisymétrique lorsque  $A^T = -A$ .  
On note  $A_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $E$ .  
On admet que  $S_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
(a) Prouver que  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .  
(b) Prouver que  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $F$  l'ensemble des matrices diagonales de  $E$ . Déterminer  $F^\perp$ .

1. On peut soit utiliser les propriétés de la trace sur la première forme  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ , soit écrire une deuxième forme

$$\langle A, B \rangle = \sum_{j=1}^n [A^T B]_{j,j} = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n [A^T]_{j,i} b_{i,j} \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$$

et rédiger comme avec le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

**Bonne définition** Quelle que soit le forme de  $\langle A, B \rangle$ , si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , le réel  $\langle A, B \rangle$  est bien défini sans problème.

**Symétrie** Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$  par commutativité du produit réel avec la deuxième forme. Avec la première forme, on peut écrire

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle.$$

**Bilinéarité** Si  $A, B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , avec la première forme, la linéarité à droite découle de celle de la trace :

$$\langle A, B + \lambda B' \rangle = \text{tr}(A^T (B + \lambda B')) = \text{tr}(A^T B) + \lambda \text{tr}(A^T B') = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, B' \rangle.$$

Avec la seconde forme,

$$\langle A, B + \lambda B' \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} (b_{i,j} + \lambda b'_{i,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} + \lambda \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b'_{i,j} = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, B' \rangle.$$

Ensuite, comme toujours, la linéarité à gauche en découle par symétrie.

**Définitivité** Cette fois, difficile de se passer de la seconde forme. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- $\langle A, A \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \geq 0$ ;
- et si  $\langle A, A \rangle = 0$ , alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs,  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j}^2 = 0$  et donc  $A = 0_n$ .

Donc  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. (a) Remarquons que le résultat découle de la question suivante (car  $A_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie) mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.

Le plus rapide pour obtenir cette supplémentarité classique est d'utiliser une symétrie.

$T : M \mapsto M^T$  est involutive ( $T \circ T = \text{id}_E$ ) et linéaire : il s'agit donc d'une symétrie sur  $\text{Ker}(T - \text{id}_E) = S_n(\mathbb{R})$  parallèlement à  $\text{Ker}(T + \text{id}_E) = A_n(\mathbb{R})$ . On a donc  $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ .

*Remarque : On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour trouver explicitement l'unique décomposition d'une matrice en partie symétrique et partie antisymétrique, ou alors utiliser un argument de dimension et le fait que l'intersection soit réduite à la matrice nulle, mais c'est (un peu) plus long et moins élégant. De plus, notre argument justifie aussi le fait qu'on ait des sev même si c'est admis par l'énoncé.*

- (b) Soit  $S \in S_n(\mathbb{R})$  et  $A \in A_n(\mathbb{R})$ . Alors  $\langle S, A \rangle = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(SA)$  d'une part, et, d'autre part

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(AS) = -\text{tr}(SA) = -\langle S, A \rangle$$

donc  $\langle S, A \rangle = 0$  et, par suite,  $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$ .

On conclut avec les dimensions :  $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim E - \dim A_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$  par la question précédente et la supplémentarité de  $A_n(\mathbb{R})$  et  $A_n(\mathbb{R})^\perp$ .

Donc  $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$ .

3. En utilisant une base de  $F$  constituée de matrices élémentaires et la deuxième forme,

$$M \in F^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle M, E_{i,i} \rangle \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,i} = 0$$

Donc  $F^\perp$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à diagonale nulle.

**Exercice 93 : Algèbre**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n > 0$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^3 + u^2 + u = 0$ . On notera  $\text{Id}$  l'application identité sur  $E$ .

1. Montrer que  $\text{Im}u \oplus \text{Ker}u = E$ .
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.  
(b) En déduire que  $\text{Im}u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .
3. On suppose que  $u$  est non bijectif.  
Déterminer les valeurs propres de  $u$ . Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. La formule du rang donne déjà  $\dim(\text{Im}u) + \dim(\text{Ker}u) = \dim E$ .

Prenons  $y \in \text{Im}u \cap \text{Ker}u$ . Alors on a  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  et  $u(y) = u^2(x) = 0_E$ , donc  $u^3(x) = u(u^2(x)) = 0_E$ .

Ainsi,  $0_E = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = u(x) = y$ .

Donc  $\text{Im}u \cap \text{Ker}u = \{0_E\}$ .

Finalement,  $\boxed{\text{Im}u \oplus \text{Ker}u = E}$ .

2. (a) Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes premiers entre eux, alors

$$\boxed{\text{Ker}(PQ)(u) = \text{Ker}P(u) \oplus \text{Ker}Q(u)}.$$

- (b) On remarque que  $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$  avec  $X \wedge (X^2 + X + 1) = 1$ .

Donc, par le lemme de décomposition des noyaux,  $E = \text{Ker}(u^3 + u^2 + u) = \text{Ker}u \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .

En passant aux dimensions,  $\dim \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}) = \dim E - \dim \text{Ker}u = \dim \text{Im}u$ .

Il reste à montrer une inclusion pour conclure.

Or, si  $y \in \text{Im}u$ , on a  $x \in E$  tel que  $y = u(x)$  et alors

$$(u^2 + u + \text{Id})(u(x)) = (u^2 + u^2 + u)(x) = 0_E$$

donc  $x \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$

donc  $\text{Im}u \subset \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$  et ils sont même dimension :  $\boxed{\text{ils sont égaux.}}$

3. Comme  $u$  est non bijectif,  $0 \in \text{Sp}u$ .

On sait par ailleurs que les valeurs propres sont parmi les racines réelles –  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ici – du polynôme annulateur

$$X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1).$$

Mais  $(X^2 + X + 1)$  n'a pas de racine réelle. Donc  $\boxed{\text{Sp}(u) = \{0\}}$ .

Remarque : on a aussi  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(u) \subset \{0, j, \bar{j}\}$ .

**Exercice 94 : Algèbre**

**PROBABILITÉS : EXERCICES 95 À 112****Exercice 95 : Probabilités**

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.

On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

(a) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.

2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément 5 boules dans l'urne.

(a) Déterminer la loi de  $X$ .

(b) Déterminer la loi de  $Y$ .

1. (a) Il s'agit d'une répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre  $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$  indépendantes dont

on cherche le nombre de succès. D'après le cours,  $X \sim \mathcal{B}(5, p)$ ,  $\mathbb{E}(X) = 5p = 1$  et  $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}$ .

(b)  $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$ . Donc  $Y(\Omega) = \{5k - 15, k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket\}$  et, si  $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(Y = 5k - 15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} \frac{4^{5-k}}{5^5}.$$

De plus, par linéarité,  $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10$  et  $\mathbb{V}(Y) = 5^2\mathbb{V}(X) = 20$ .

2. (a)  $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  et en prenant comme modèle  $\Omega = \mathcal{P}_5(\mathcal{B})$  (parties à 5 éléments) où  $\mathcal{B}$  est l'ensemble des boules,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}$  uniforme, avec  $|\Omega| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(5!)^2}$  :

■  $(X = 0)$  est le cas où il n'y a que des boules noires (5 parmi 8) donc

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5! \cdot 8!}{3! \cdot 10!} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \frac{2}{9}$$

■  $(X = 1)$  est le cas où il n'y a qu'une seule boule blanche parmi 2 et 4 boules noires parmi 8 donc

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2 \cdot \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \cdot (5!)^2 \cdot 8!}{(4!)^2 \cdot 10!} = \frac{2 \cdot 25}{9 \cdot 10} = \frac{5}{9}$$

■  $(X = 2)$  est le cas où il n'y a les deux boules blanches, il n'y a donc à choisir que 3 boules noires parmi 8 donc

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{9}$$

ou alors  $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$ .

(b) On a toujours  $Y = 5X - 15$ . Donc  $Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\}$  et

$$\mathbb{P}(Y = -15) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{9}$$

$$\mathbb{P}(Y = -10) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{9}$$

$$\mathbb{P}(Y = -5) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{9}$$

**Exercice 96**

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de loi de probabilité donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = p_n$ . La fonction génératrice de  $X$  est notée  $G_X$  et elle est définie par  $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ .

1. Prouver que l'intervalle  $] - 1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de  $G_X$ .
2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On pose  $S = X_1 + X_2$ .

Démontrer que  $\forall t \in ] - 1, 1[$ ,  $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$  :

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
- (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par  $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$ .

Remarque : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à  $n$  variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.

On note  $S_n$  la somme des numéros tirés.

Soit  $t \in ] - 1, 1[$ . Déterminer  $G_{S_n}(t)$  puis en déduire la loi de  $S_n$ .

1. Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$  converge (vers 1), le rayon de convergence de la série entière  $\sum p_n t^n$  est au moins égal à 1, donc  $] - 1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de  $G_X$ .
2. (a) Les séries entières ayant toute un rayon de convergence au moins égal à 1, on peut effectuer un produit de Cauchy (de rayon de convergence au moins égal à 1 aussi) et écrire, pour  $t \in ] - 1, 1[$ ,

$$\begin{aligned}
 G_S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n) t^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) \right) t^n && (S = n) = \bigsqcup_{k=0}^n (X_1 = k, X_2 = n - k) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n - k) \right) t^n && \text{par indépendance} \\
 &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) t^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_2 = n) t^n \right) && \text{par produit de Cauchy de séries entières} \\
 &= G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)
 \end{aligned}$$

(b) Comme  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, c'est aussi le cas, pour  $t \in ] - 1, 1[$ , de  $t^{X_1}$  et  $t^{X_2}$ . On a donc

$$G_S(t) = \mathbb{E}[t^S] = \mathbb{E}[t^{X_1} t^{X_2}] = \mathbb{E}[t^{X_1}] \mathbb{E}[t^{X_2}] = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t).$$

3. Soit, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $X_i$  la variable aléatoire du numéro de la boule tirée au  $i^{\text{e}}$  tirage.

Alors les  $X_i$  sont des v.a. de fonction génératrice  $t \mapsto \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2$ .

D'après ce qui précède,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  est de fonction génératrice

$$G_{S_n} = (G_{X_i})^n : t \mapsto \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}t^2 \right)^n = \frac{(1 + 2t + t^2)^n}{4^n} = \frac{(1 + t)^{2n}}{4^n}.$$

Par la formule du binôme de Newton,  $G_{S_n} : t \mapsto \sum_{k=0}^{2n} \frac{\binom{2n}{k}}{4^n} t^k$ .

Donc  $S_n(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\binom{2n}{k}}{4^n} = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} : S_n \sim \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ .

**Exercice 97 : Probabilités**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  dont la loi est donnée par

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e^j k!}.$$

- Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- Prouver que  $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$  existe et la calculer.

1. D'après l'énoncé,  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ .

Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Par application de la formule des probabilités totales au système complet d'événements  $((Y = k))_{k \in \mathbb{N}}$ , on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j, Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)}{e^j k! 2^{j+k}} \\ &= \frac{1}{e^j 2^j} \left( j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k! 2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)! 2^k} \right) \\ &= \frac{1}{e^j 2^j} \left( j + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)^k}{k!} \\ &= \frac{2j+1}{e^j 2^{j+1}} e^{1/2} \\ &= \frac{2j+1}{\sqrt{e}^j 2^{j+1}} \end{aligned}$$

en reconnaissant des séries exponentielles donc convergentes et en déarrant l'indice de la deuxième somme à 1 pour ne pas écrire de factorielle de nombre strictement négatif, le terme pour  $k = 0$  étant nul.

Ainsi, par symétrie des rôles,  $\forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \mathbb{P}(X = j) = \frac{2j+1}{\sqrt{e}^j 2^{j+1}}$  et  $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2k+1}{\sqrt{e}^k 2^{k+1}}$ .

On remarque que  $\mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0)$  donc  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

- L'espérance  $\mathbb{E}[2^{X+Y}]$  de la variable aléatoire  $2^{X+Y}$  réelle positive existe toujours dans  $[0, +\infty]$ . Montrons qu'elle est finie et calculons sa valeur.  
Par la formule de transfert puis symétrie des rôles, dans  $[0, +\infty]$ ,

$$\mathbb{E}[2^{X+Y}] = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}((X, Y) = (j, k)) 2^{j+k} = \frac{1}{e} \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{j+k}{j! k!} = \frac{1}{e} \left( \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{j! k!} + \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{k}{j! k!} \right) = \frac{2}{e} \sum_{j \in \mathbb{N}^2} \frac{j}{j! k!}$$

Par théorème sur les sommes doubles produits dans le cas positif,

$$\mathbb{E}[2^{X+Y}] = \frac{2}{e} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) = \frac{2}{e} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j-1)!} \right) \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) = 2e < +\infty$$

Donc  $2^{X+Y}$  est d'espérance finie égale à  $2e$ .



**Exercice 98 : Probabilités**

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  (où  $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ . Justifier.

2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i)$ .

(b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

*Indication* : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$ .

(c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

1. Il s'agit d'une répétition de  $n$  expériences de Bernoulli de même paramètre  $p$  indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours,  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

2. (a) En supposant l'événement  $(X = i)$  réalisé, on se retrouve de nouveau dans une situation de nombre de succès de  $n - i$  expériences de Bernoulli de même paramètre  $p$  indépendantes. Donc, pour la probabilité conditionnelle  $P_{(X=i)}$ ,  $Y$  suit une loi binomiale de paramètre  $(n - i, p)$ .

Ainsi, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(Y = k \mid X = i) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}$  (qui est nul si  $k > n - i$ ).

(b)  $Z$  correspondant au nombre total de correspondant ayant répondu,  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $((X = i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  associé à  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Z = k \mid X = i) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i \mid X = i) && \text{On a } 0 \leq X \leq k \text{ et } Y = Z - X. \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-i-k} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} && \text{Formule admise.} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \cdot 1^{k-i} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k && \text{Binôme de Newton.} \\ &= \binom{n}{k} (p(2-p))^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

avec  $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$ . Donc  $Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$ .

(c) D'après le cours,  $\mathbb{E}(X) = np(2-p)$  et  $\mathbb{V}(X) = np(2-p)(1-p)^2$ .

*Remarque* : pour prouver la formule admise imaginons devoir choisir dans une ville de  $n$  habitants,  $k$  conseillers municipaux et, parmi ces conseillers,  $i$  adjoints.

- On peut choisir d'abord les  $k$  conseillers parmi  $n$  habitants de  $\binom{n}{k}$  manières différentes puis  $i$  adjoints parmi les  $k$  conseillers de  $\binom{k}{i}$  manières différentes ce qui laisse au total  $\binom{k}{i} \binom{n}{k}$  choix possibles.
- On peut aussi choisir d'abord les  $i$  adjoints parmi  $n$  habitants de  $\binom{n}{i}$  manières différentes puis  $k - i$  autres conseillers parmi les  $n - i$  habitants restant de  $\binom{n-i}{k-i}$  manières différentes ce qui laisse au total  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i}$  choix possibles.

On a compté deux fois la même chose, d'où la formule.

**Exercice 99 : Probabilités****1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.****2. Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$ .**On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Prouver que

$$\forall a \in ]0, +\infty[, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

**3. Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite  $(Y_i)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i^{\text{e}}$  tirage.**1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**Soit  $X \in L^2$  une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2,  $a > 0$ .

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire, en notant  $m$  l'espérance de  $X$  et  $\sigma$  son écart-type,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

**2. Loi faible des grands nombres**On remarque que, comme les  $Y_n$  sont identiquement distribuées,■ par linéarité,  $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}(Y_1)$ ;■ par indépendance,  $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{V(Y_1)}{n}$ .

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$

**3. Application**On considère la suite  $(Y_n)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_n$  mesure l'issue du  $n^{\text{e}}$  tirage :  $Y_n(\omega) = 1$  si la  $n^{\text{e}}$  boule tirée est rouge, 0 sinon. Ainsi, dans notre contexte,  $Y_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{2}{5}\right)$  est les  $Y_n$  sont indépendantes car les tirages le sont,  $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{5} = 0,4$  et  $V(Y_n) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ .On cherche  $n$  tel que  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0,4\right| \geq 0,05\right) \leq 0,05$ .D'après la question précédente, il suffit de choisir  $n$  tel que  $\frac{6/25}{n \cdot 0,05^2} \leq 0,05$  c'est-à-dire

$$n \geq \frac{6/25}{(1/20)^3} = 6 \cdot 4^2 \cdot 20 = 1920.$$

**Exercice 100 : Probabilités**

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ . Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $R$  définie par  $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ .
2. Calculer  $\lambda$ .
3. Prouver que  $X$  admet une espérance, puis la calculer.
4.  $X$  admet-elle une variance? Justifier.

1. Par la méthode habituelle, on trouve  $R(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$  avec  $a = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{(-1)(-1+2)} = -1$  et  $c = \frac{1}{(-2)(-2+1)} = \frac{1}{2}$ .

2. On cherche  $\lambda$  tel que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)} = 1$ . Or, par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} \right) - 0 = \frac{1}{4}.$$

Donc  $\lambda = 4$ .

3. Comme  $X$  est à valeurs réelles positives, elle admet une espérance dans  $[0, +\infty]$ . On va montrer qu'elle est finie et la calculer.

Dans  $[0, +\infty]$ , on calcule par décomposition en éléments simples et télescopage

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{n(n+1)(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = 4 \left( \frac{1}{1+1} - 0 \right) < +\infty$$

Donc  $X$  est d'espérance finie égale à 2.

4. On cherche à savoir si  $X \in L^2$  c'est-à-dire, par théorème de transfert, si  $(\mathbb{P}(X = n)n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable c'est-à-dire si la série de terme général  $\mathbb{P}(X = n)n^2 = \frac{4n}{(n+1)(n+2)}$  est absolument convergente.

Or  $0 \leq \frac{4n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{4}{n}$  est un terme général de série divergente, donc  $X$  n'admet pas de variance.

**Exercice 101 : Probabilités**

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

À l'instant  $t = 0$ , il se trouve au point  $A$ .

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.

L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On note  $A_n$  l'événement «l'animal est en  $A$  après son  $n^{\text{e}}$  trajet».

On note  $B_n$  l'événement «l'animal est en  $B$  après son  $n^{\text{e}}$  trajet».

On note  $C_n$  l'événement «l'animal est en  $C$  après son  $n^{\text{e}}$  trajet».

On pose  $\mathbb{P}(A_n) = a_n$ ,  $\mathbb{P}(B_n) = b_n$  et  $\mathbb{P}(C_n) = c_n$ .

- (a) Exprimer, en le justifiant,  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .  
(b) Exprimer, de même,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

2. On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Justifier, sans calcul, que la matrice  $A$  est diagonalisable.
  - Prouver que  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et déterminer le sous-espace propre associé.
  - Déterminer une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^{-1}AP$ .  
Remarque : le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .  
Remarque : aucune expression finalisée de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  n'est demandée.

1. (a)  $(A_n, B_n, C_n)$  est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} | B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} | C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

donc  $a_{n+1} = 0a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$  c'est-à-dire  $a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$ .

(b) De même,  $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$  et  $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n$ .

2. (a)  $A$  est symétrique à coefficients réels, donc elle est diagonalisable.

(b)  $\text{rg}\left(A + \frac{1}{2}I_3\right) = \text{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$ , donc  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre de  $A$  et  $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$ .

Comme dans cette matrice, les colonnes vérifient  $C_1 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $C_2 - C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}}(A)$  et sont

indépendant donc  $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ .

Remarque : On peut aussi résoudre le système  $\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y$ .

- (c) Puisque  $-\frac{1}{2}$  est valeur propre double de  $A$  et  $\text{tr}(A) = 0$ , on en déduit que 1 est une valeur propre simple de  $A$ . Or  $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ .

On aurait aussi pu voir directement sur  $A$  que  $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ce qui donne directement la valeur propre 1 et un vecteur propre associé.

Ainsi  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  est une base diagonalisante de  $A$  : on pose  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ , et on a alors  $D = P^{-1}AP$ .

3. D'après la question 1., pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  et donc, par récurrence (suite géométrique),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 102 : Probabilités**

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On considère  $N$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_N$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes et de même loi géométrique de paramètre  $p$ .

1. Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer  $P(X_i \leq n)$ , puis  $P(X_i > n)$ .

2. On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$  c'est-à-dire  $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$ ,

min désignant « le plus petit élément de ».

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\mathbb{P}(Y > n)$ . En déduire  $\mathbb{P}(Y \leq n)$ , puis  $\mathbb{P}(Y = n)$ .

(b) Reconnaître la loi de  $Y$ . En déduire  $\mathbb{E}(Y)$ .

1. Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

En interprétant  $X_i$  comme loi d'un premier succès dans la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre  $p$  ce qui ne nuit pas à la généralité car les probabilités demandées ne dépendent que de la loi de  $X_i$ , l'événement  $(X_i > n)$  correspond à avoir  $n$  échecs sur les  $n$  premières répétitions donc

$$\mathbb{P}(X_i > n) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(X_i \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X_i > n) = 1 - q^n.$$

Notons que les résultats restent valables pour  $n = 0$ .

Cela se retrouve par le calcul :

$$P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n p q^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - q^n$$

puis  $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par indépendance et avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(Y > n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^N (X_i > n)\right) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(X_i > n) = q^{nN}.$$

Donc  $\mathbb{P}(Y \leq n) = 1 - \mathbb{P}(Y > n) = 1 - q^{nN}$ , puis

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N} (1 - q^N).$$

(Calcul encore valable si  $n = 1$ .)

(b) Avec  $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ , on reconnaît  $Y \sim \mathcal{G}(1 - q^N)$ .

D'après le cours,  $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$ .

**Exercice 103 : Probabilités****Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.**Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.1. (a) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$ .Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .(b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .2. Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .On suppose que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .On suppose que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = m)$  est une loi binomiale de paramètre  $(m, p)$ .Déterminer la loi de  $X$ .1. (a) On a  $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) \stackrel{X_1 \perp X_2}{=} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton. Donc  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .(b) D'après le cours,  $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$  (ce qui se retrouve linéarité de l'espérance et indépendance, respectivement.)2. On a déjà  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . soit  $n \in \mathbb{N}$ .En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $((Y = m))_{m \in \mathbb{N}}$  associé à  $Y$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n \mid Y = m) \cdot \mathbb{P}(Y = m) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} && \text{probabilité nulle si } n > m \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} && \text{série exponentielle} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc  $X \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ .

**Exercice 104 : Probabilités**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les  $n$  boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les  $n$  boules.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par  $X$ .
2. (a) Déterminer la probabilité  $\mathbb{P}(X = 2)$ .  
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
3. (a) Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .  
(b) Déterminer la limite de  $\mathbb{E}(X)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Interpréter ce résultat.

1.  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

2. Première méthode

(a) On modélise l'expérience avec  $\Omega = \{1, 2, 3\}^n$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $\mathbb{P}$  probabilité uniforme.

Alors  $(X = 2) = \{(1, \dots, 1), (2, \dots, 2), (3, \dots, 3)\}$  et  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{|(X = 2)|}{|\Omega|} = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$ .

(b) Alors  $(X = 1)$  contient tous les  $n$ -uplets composés d'exactly 2 valeurs. Il y a

- 3 choix possibles pour la valeur qui n'apparaît pas,
- puis  $2^n - 2$  choix possibles pour toutes les composantes : 2 pour chacune mais il faut enlever les 2 cas où il n'y aurait qu'une seule des deux valeurs, comptée dans le cas  $(X = 2)$ .

Ainsi,  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{|(X = 1)|}{|\Omega|} = \frac{3(2^n - 2)}{3^n} = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$  et  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$ .

Deuxième méthode

(a) Notons, pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $B_i$  la variable aléatoire du numéro du compartiment dans lequel se trouve la boule numéro  $i$ . Les  $B_i$  sont des v.a. de loi uniforme sur  $\{1, 2, 3\}$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(B_1 = 1, \dots, B_n = 1) + \mathbb{P}(B_1 = 2, \dots, B_n = 2) + \mathbb{P}(B_1 = 3, \dots, B_n = 3) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 1) + \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 2) + \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i = 3) \quad \text{indépendance} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{le 3 correspond aussi au choix du compartiment non vide} \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3^{n-1}}$ .

(b) Pour le cas  $(X \geq 1) = (X = 1) \sqcup (X = 2)$ , il y a trois choix possibles pour le compartiment restant vide.

On peut faire une disjonction de cas suivant le nombre  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  de boules allant dans le compartiment non vide de numéro minimal. La compartiment vide étant fixé, il y a  $\binom{n}{k}$  choix possibles des boules dans le premier compartiment non vide. Ainsi

$$\mathbb{P}(X = 1) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\binom{n}{k}}_{1^{\text{er}} \text{ comp.}} \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}}_{2^{\text{e}} \text{ comp.}} = \frac{1}{3^{n-1}} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 2 \right)$$

donc  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$  et  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$ .

3. (a)  $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

(b) et donc  $\mathbb{E}(X) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Lorsque le nombre de boules devient très grand, en moyenne, aucun compartiment ne restera vide.

**Exercice 105 : Probabilités**

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .

- On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.  
On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.  
On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6.  
Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?
- Déterminer la limite de  $(p_n)$ . Interpréter ce résultat.

- Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Si  $B$  est un événement non négligeable et si  $(A_i)_{i \in I}$  (où  $I$  est fini ou dénombrable) est un système complet ou quasi-complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(B | A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

**Preuve :** Soit  $i \in I$ .

$$\mathbb{P}(A_i | B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B | A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(B | A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

en appliquant au dénominateur la formule des probabilités totales avec le système complet ou quasi-complet d'événements  $(A_i)_{i \in I}$ .

- Notons  $T$  l'événement « le dé choisi est pipé » et  $A$  l'événement « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ». On demande de calculer  $\mathbb{P}(T | A)$ .

Le système  $(T, \bar{T})$  est un système complet d'événements non négligeables, avec  $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$  et donc  $\mathbb{P}(\bar{T}) = \frac{3}{4}$ . Alors, d'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(T | A) = \frac{\mathbb{P}(A | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(A | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A | \bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

donc  $\mathbb{P}(T | A) = \frac{1}{2}$ .

- Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'événement « on obtient le chiffre 6 au  $k^{\text{e}}$  lancer » et on pose  $B = \bigcap_{k=1}^n A_k$ .

On cherche à calculer  $p_n = \mathbb{P}(T | B)$ .

Toujours avec le système complet d'événements  $(T, \bar{T})$ , d'après la formule de Bayes,

$$p_n = \mathbb{P}(T | B) = \frac{\mathbb{P}(B | T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(B | T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(B | \bar{T})\mathbb{P}(\bar{T})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}$ .

- Donc  $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . Cela signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de très fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.



**Exercice 106 : Probabilités**

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
Elles suivent la même loi définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

où  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .

On considère alors les variables  $U$  et  $V$  définies par  $U = \sup(X, Y)$  et  $V = \inf(X, Y)$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ .
2. Déterminer la loi marginale de  $U$ .  
On admet que  $V(\Omega) = \mathbb{N}$  et que  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$ .
3. Prouver que  $W = V + 1$  suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de  $V$ .
4.  $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

1. On a  $(U, V)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq j \leq i\}$ .

Soit  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $0 \leq j < i$ . Alors

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \mathbb{P}(U = i, V = j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) + \mathbb{P}(X = j, Y = i)$$

par disjonction de cas, le fait que  $i \neq j$  assure que ces cas sont bien disjoints.  
Par indépendance, symétrie des rôles et définition des lois de  $X$  et  $Y$ ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = 2(pq^i)(pq^j) = 2p^2q^{i+j}$$

Lorsque  $i = j$ ,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, i)) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) = (pq^i)^2 = p^2q^{2i}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \begin{cases} 2p^2q^{i+j} & \text{si } 0 \leq j < i; \\ p^2q^{2i} & \text{si } i = j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On a  $U(\Omega) = \mathbb{N}$  et, si  $i \in \mathbb{N}$ , en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $((V = j))_{j \in \mathbb{N}}$  associé à  $V$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(U = i, V = j) = \sum_{j=0}^{i-1} 2p^2q^{i+j} + p^2q^{2i} \\ &= 2p^2q^i \sum_{j=0}^{i-1} q^j + p^2q^{2i} \\ &= 2p^2q^i \frac{1 - q^i}{1 - q} + p^2q^{2i} \\ &= 2pq^i(1 - q^i) + p^2q^{2i} \\ &= (2 - 2q^i + pq^i)pq^i \\ &= (2 - 2q^i + (1 - q)q^i)pq^i \end{aligned}$$

donc  $\mathbb{P}(U = i) = (2 - 2q^i + pq^i)pq^i = pq^i(2 - q^i + q^{i+1})$ .

3. On a  $W(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(W = n) = \mathbb{P}(V = n - 1) = pq^{2(n-1)}(1 + q) = (q^2)^{n-1}(1 - q)(1 + q) = (1 - (1 - q^2))^{n-1}(1 - q^2)$$

donc  $W \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$ . D'après le cours,  $\mathbb{E}(W) = \frac{1}{1 - q^2} = \mathbb{E}(V) + 1$  et donc  $\mathbb{E}(V) = \frac{q^2}{1 - q^2}$ .

4.  $\mathbb{P}((U, V) = (0, 1)) = 0 \neq \mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = 1)$  donc  $U \not\perp V$ .

**Exercice 107 : Probabilités**

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$ .

- L'urne  $U_1$  contient deux boules blanches et trois boules noires.
- L'urne  $U_2$  contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_1$ .
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne  $U_2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $B_n$  l'événement « la boule tirée au  $n^{\text{e}}$  tirage est blanche » et on pose  $p_n = \mathbb{P}(B_n)$ .

1. Calculer  $p_1$ .

2. Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .

3. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la valeur de  $p_n$ .

1. Notons  $A$  l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne  $U_1$  ».

Alors  $\bar{A}$  est l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne  $U_2$  ».

$(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 | A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B_1 | \bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

On a donc  $p_1 = \frac{17}{35}$ .

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $(B_n, \bar{B}_n)$  est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} | B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} | \bar{B}_n)\mathbb{P}(\bar{B}_n) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$

Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$ .

3. Donc  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite arithmético-géométrique.

On cherche une solution particulière constante

$$c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7} \iff c = \frac{20}{41}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée  $u_{n+1} = -\frac{6}{35}u_n$  sont les suites géométrique de raison  $-\frac{6}{35}$ .

On a donc une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = \lambda \left(-\frac{6}{35}\right)^n + \frac{20}{41}$ .

Remarque : si on ne reconnaît pas une équation linéaire (ou plutôt affine), on peut poser  $(u_n)_n = (p_n - c)_n$  et vérifier que  $c$  est une suite géométrique.

Or  $p_1 = \frac{17}{35} = -\frac{6\lambda}{35} + \frac{20}{41}$  donc  $\lambda = -\frac{35}{6} \left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = \frac{1}{82}$

**Exercice 108 : Probabilités**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e^{2^{i+1}} j!}$ .

1. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
2. (a) Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .  
(b) Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .
3. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
4. Calculer  $\mathbb{P}(X = Y)$ .

1. On a  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et si  $i \in \mathbb{N}$ , comme  $((Y = j))_{j \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements (associé à  $Y$ ), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2^{i+1}} j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

en reconnaissant une série exponentielle. Donc  $\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$ .

De même, pour  $j \in \mathbb{N}$ , comme  $((X = i))_{i \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements (associé à  $X$ ), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2^{i+1}} j!} = \frac{1}{e^{j!}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

en reconnaissant une série géométrique. Donc  $\mathbb{P}(Y = j) = e^{-1} \frac{1^j}{j!}$  :  $Y \sim \mathcal{P}(1)$ .

2. (a) On a bien  $(1 + X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(1 + X = n) = \mathbb{P}(X = n - 1) = \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}$  donc  $1 + X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Alors  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1 + X) - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$  donc  $\mathbb{E}(X) = 1$  et  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(1 + X) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$  donc  $\mathbb{V}(X) = 2$ .

(b) D'après le cours,  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) = 1$ .

3. Avec les résultats précédents, pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$  donc  $X \perp Y$ .

4.  $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{2^{n+1}} n!} = \frac{1}{2e}$  en reconnaissant de nouveau une série exponentielle, donc

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2\sqrt{e}}.$$

**Exercice 109 : Probabilités**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Déterminer la loi de  $Y$ .

1. On a  $X(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$  car il n'y a que deux boules noires. Notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des  $n+2$  boules.

**Première méthode** On peut n'observer que les deux premiers tirages pour conclure. L'univers  $\Omega = \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$  est l'ensemble des 2-arrangements (couples de 2 éléments distincts) des  $n+2$  boules, de cardinal  $(n+2)(n+1)$ , la tribu est toujours  $\mathcal{P}(\Omega)$  et la probabilité est toujours uniforme.

- $\mathbb{P}(X=1) = \frac{|(X=1)|}{|\Omega|} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n}{n+2}$  car dans un couple de  $(X=1)$ , il faut placer l'une des  $n$  boules blanches, l'une des  $n+1$  autres boules ensuite.
- $\mathbb{P}(X=2) = \frac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$  car dans un couple de  $(X=2)$ , il faut placer l'une des 2 boules noires, puis l'une des  $n$  boules blanches.
- $\mathbb{P}(X=3) = \frac{|(X=3)|}{|\Omega|} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$  car dans un couple de  $(X=3)$ , il faut placer l'une des 2 boules noires d'abord puis la deuxième (pour laquelle il n'y a plus de choix).

**Deuxième méthode** On note  $B_j$  l'événement « Tirer une boule blanche au  $j^{\text{e}}$  tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, (on tire respectivement 0, 1 ou 2 noires puis une blanche)

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{n}{n+2} \quad \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(B_2 | \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \cdot \mathbb{P}(\overline{B_2} | \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

**Troisième méthode** On observe tout le tirage :  $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$  de cardinal  $(n+2)!$ , un tirage est une permutation des  $n+2$  boules. La tribu est  $\mathcal{P}(\Omega)$  (univers au plus dénombrable) et la probabilité est uniforme vu la description de l'expérience.

- Une permutation de  $(X=1)$  est une permutation commençant par une des  $n$  boules blanches, puis permutant les  $n+1$  autres ensuite. On trouve  $|(X=1)| = n(n+1)!$  et on retrouve  $\mathbb{P}(X=1)$ .
- Une permutation de  $(X=2)$  est une permutation commençant par une des 2 boules noires, puis une des  $n$  boules blanches, puis permutant les  $n$  autres ensuite. On trouve  $|(X=2)| = 2 \cdot n \cdot n!$  et on retrouve  $\mathbb{P}(X=2)$ .
- Une permutation de  $(X=3)$  permute d'abord les 2 boules noires, puis permute les  $n$  boules blanches. On trouve  $|(X=3)| = 2! \cdot n!$  et on retrouve  $\mathbb{P}(X=3)$ .

**Vérification** On calcule  $\sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(Y=k) = 1$ . On peut aussi toujours déduire l'une des probabilités des autres.

2. On a  $Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  car au mieux on a une boule  $n^{\circ} 1$  au premier tirage, au pire, les deux boules  $n^{\circ} 1$  sont tirées à la fin.

**Première méthode** On peut n'observer que les positions des boules  $n^{\circ} 1$ , sans ordre. L'univers est l'ensemble  $\Omega = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$  des paires d'indices, de cardinal  $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , la tribu est toujours  $\mathcal{P}(\Omega)$  et la probabilité est toujours uniforme. Dans une paire de  $(Y=k)$ , on a  $k$  et un autre entier entre  $k+1$  et  $n+2$ .

$$\text{On obtient } \mathbb{P}(Y=k) = \frac{n+2-(k+1)+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

**Deuxième méthode** On note  $A_j$  l'événement « Tirer une boule qui ne porte pas le  $n^{\circ} 1$  au  $j^{\text{e}}$  tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, en regardant l'état de l'urne à chaque tirage,

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j \cap \overline{A}_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{j=1}^{k-2} \mathbb{P}\left(A_{j+1} \mid \bigcap_{i=1}^j A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{A}_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \prod_{j=0}^{k-2} \frac{n-j}{n+2-j} \cdot \frac{2}{n+3-k} = 2 \cdot \frac{n!}{(n+1-k)!} \cdot \frac{(n+2-k)}{(n+2)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

**Troisième méthode** On peut reprendre l'univers  $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  d'observation de tous les tirages.

Pour décrire une permutation de  $(Y=k)$ , il faut choisir d'abord  $k-1$  des  $n$  boules ne portant pas le  $n^{\circ} 1$ , les permuter, puis une de 2 boules  $n^{\circ} 1$  puis permuter les  $n+2-k$  boules restantes.

$$\text{On obtient } \mathbb{P}(Y=k) = \frac{\binom{n}{k-1} (k-1)! \cdot 2 \cdot (n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{2n!(n+2-k)!}{(n-k+1)!(n+2)!} = \frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

**Vérification** On calcule  $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y=k) = 1$  avec le changement d'indice  $j = n+2-k$ .

**Exercice 110 : Probabilités**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On considère la série entière  $\sum t^n \mathbb{P}(X = n)$  de variable réelle  $t$ .

On note  $R_X$  son rayon de convergence.

(a) Prouver que  $R_X \geq 1$ .

On pose  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$  et on note  $D_{G_X}$  l'ensemble de définition de  $G_X$ .

Justifier que  $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ .

Pour tout réel  $t$  fixé de  $[-1, 1]$ , exprimer  $G_X(t)$  sous forme d'une espérance.

(b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Exprimer, en justifiant la réponse,  $\mathbb{P}(X = k)$  en fonction de  $G_X^{(k)}(0)$ .

2. (a) On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Déterminer  $D_{G_X}$  et, pour tout  $t \in D_{G_X}$ , calculer  $G_X(t)$ .

(b) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de  $X + Y$ .

1. (a) Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)$  converge (vers 1),  $R_X \geq 1$ .

Le même argument dit que  $\sum \mathbb{P}(X = n)t^n$  converge absolument pour  $t = \pm 1$  donc  $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ .

D'après la formule de transfert, pour tout réel  $t$  fixé de  $[-1, 1]$ ,  $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ .

(b) D'après la théorie des séries entières,  $G_X$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, 1[$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$ .

2. (a)  $G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ . On reconnaît une série exponentielle donc

$$R_X = +\infty, D_{G_X} = \mathbb{R} \text{ et } G_X : t \mapsto e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

(b) Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t^X$  et  $t^Y$  le sont et

$$G_{X+Y} : t \mapsto \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X) \mathbb{E}(t^Y) = e^{\lambda_1(t-1)} e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(t-1)}$$

donc  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

**Exercice 111 : Probabilités**

On admet, dans cet exercice, que :  $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$  converge et  $\forall x \in ]-1, 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi de probabilité du couple  $(X, Y)$  est donnée par

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. (a) Déterminer la loi de  $Y$ .  
 (b) Prouver que  $1 + Y$  suit une loi géométrique.  
 (c) Déterminer l'espérance de  $Y$ .

3. Déterminer la loi de  $X$ .

1. On montre qu'on a une distribution de probabilité : pour tout  $(k, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \geq 0$  et

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{2}\right)^n 2^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

à l'aide de la formule du binôme de Newton puis en reconnaissant une série géométrique.

2. (a) On a  $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$  et si  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $((X = k))_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements (associé à  $X$ ), par la formule des probabilités totales,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \boxed{p(1-p)^n}$$

comme dans la question précédente.

(b) Alors  $(1 + Y)(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(1 + Y = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = p(1-p)^{n-1}$  donc  $\boxed{1 + Y \sim \mathcal{G}(p)}$ .

(c)  $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1 + Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1}$  d'après le cours.

3. On a  $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$  et si  $k \in \mathbb{N}$ , comme  $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements (associé à  $Y$ ), par la formule des probabilités totales,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n = \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k}\right) \left(\frac{1-p}{2}\right)^k p = \frac{p \left(\frac{1-p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{1-p}{2}\right)^{k+1}} = \boxed{\frac{2p(1-p)^k}{(1+p)^{k+1}}}$$

d'après la formule donnée en préambule.

Remarque : on peut continuer  $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k \frac{2p}{1+p} = \left(1 - \frac{2p}{1+p}\right)^k \frac{2p}{1+p}$ , obtenir que  $1 + X \sim \mathcal{G}\left(\frac{2p}{1+p}\right)$  et en déduire  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ .

**Exercice 112 : Probabilités**