

Calcul différentiel et optimisation

Dans tout le chapitre, E et F désignent des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie nulle, \mathcal{U} désigne un ouvert de E .

1 DIFFÉRENTIELLE

1 Différentielle en un point

Définition 1 : Application différentiable en un point

Soit f définie sur un ouvert \mathcal{U} de E , à valeurs dans F . Soit a un point de \mathcal{U} . On dit que f est **différentiable** en a lorsqu'il existe une application linéaire ℓ_a de E dans F telle que, au voisinage de 0_E ,

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

ou encore, au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + \ell_a(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a).$$

Lorsqu'elle existe, l'application ℓ_a est unique et appelée **différentielle** de f au point a ou encore **application linéaire tangente** à f en a , notée $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$. On a donc

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

Propriété 1 : différentiable \Rightarrow continue

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

2 Cas particuliers

Propriété 2 : Cas d'une fonction d'une variable réelle

Dans le cas d'une fonction $f : I \rightarrow F$, f est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a .

Dans ce cas, $df(a) : h \mapsto hf'(a)$ et en particulier $f'(a) = df(a)(1)$.

Propriété 3 : Cas d'une fonction constante

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est constante, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Propriété 4 : Cas d'une fonction linéaire

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est la restriction à \mathcal{U} d'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, elle est différentiable en tout point de \mathcal{U} et pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df(a) = \varphi$ (et donc df est constante).

3 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Définition 2 : Dérivée selon un vecteur

On dit que $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est **dérivable selon le vecteur** $v \in E$ au point $a \in \mathcal{U}$, lorsque $\phi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.

On note alors $D_v f(a) = \phi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$.

Définition 3 : Dérivées partielles

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

On appelle **j^{e} dérivée partielle de f en a** , lorsqu'elle existe, la dérivée de f selon le vecteur e_j de base en a :

$$\partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j} f(a) \in F.$$

4 Lien entre différentielle et dérivées partielles

Propriété 5 : Lien entre différentielle et dérivées partielles

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et $D_v f(a) = df(a)(v)$.

Cas particulier 1 : Dérivée selon un vecteur de base

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ les dérivées partielles de f dans la base \mathcal{B} . Si f est différentiable en a , alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$df(a)(e_j) = D_{e_j} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Propriété 6 : Expression de la différentielle avec les dérivées partielles

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, $a \in \mathcal{U}$ tel que f est différentiable en a .

Alors pour tout vecteur $h = \sum_{j=1}^p h_j e_j \in E$,

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$



On note $dx_j : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ h & \mapsto h_j \end{cases}$ la forme linéaire j^{e} coordonnée dans \mathcal{B} . Alors on a

$$df(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

5 Matrice jacobienne

Définition 4 : Matrice jacobienne

Soit $p = \dim E$, $n = \dim F$, \mathcal{U} ouvert de E et $f : E \rightarrow F$ différentiable, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F . On note $f = \sum_{i=1}^n f_i \varepsilon_i$.

On appelle **matrice jacobienne** de f en a dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Propriété 7 : Matrice jacobienne et différentielle

$$J_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(df(a))$$

6 Gradient

Définition 5 : Gradient

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors pour tout $a \in \mathcal{U}$, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(a)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ et appelé **gradient de f en a** tel que pour tout $h \in E$,

$$df(a)(h) = (\nabla f(a) | h).$$

Propriété 8 : Coordonnées du gradient

Soit E un espace **euclidien**, \mathcal{U} un ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si l'on fixe une base **orthonormée** de E , les coordonnées de $\nabla f(a)$ dans cette base sont

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

III OPÉRATIONS SUR LES DIFFÉRENTIELLES

1 Combinaisons linéaires

Propriété 9 : Linéarité

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f, g : \mathcal{U} \rightarrow F$ différentiables en $a \in \mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable et

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a).$$

2 Image par une application multilinéaire

Propriété 10 : Image par une application multilinéaire

Soit \mathcal{U} ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie, E_1, \dots, E_q, F des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie, $f_1 : \mathcal{U} \rightarrow E_1, \dots, f_q : \mathcal{U} \rightarrow E_q$ des applications différentiables en $a \in \mathcal{U}$ et $M : E_1 \times \dots \times E_q \rightarrow F$ une fonction q -linéaire.

Alors $\phi : \mathcal{U} \rightarrow F$ définie par $\phi : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_q(x))$ est différentiable en a et

$$d\phi(a) : h \mapsto \sum_{k=1}^q M(f_1(a), \dots, df_k(a)(h), \dots, f_q(a)).$$

3 Composition

Propriété 11 : Différentielle d'une composée

Soit \mathcal{U} ouvert de E , \mathcal{V} ouvert de F , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{V} \rightarrow G$ différentiable en $b = f(a)$.

Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Propriété 12 : Matrice jacobienne d'une composée

En munissant E , F et G de bases, on obtient

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Corollaire 1 : Dérivée le long d'un arc

Soit \mathcal{U} ouvert de E , $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, I intervalle de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ une application dérivable.

On suppose que f est différentiable en $\gamma(t)$ où $t \in I$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en t et

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(\gamma'(t)).$$

En munissant E d'une base, on retrouve l'expression vue avec la règle de la chaîne, si les coordonnées de $\gamma(t)$ sont $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_p(t))$,

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^p \gamma'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

En particulier, si $\gamma : t \mapsto x + tv$ où $x, v \in \mathcal{U}$ sont fixés,

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t))(v) = D_v f(\gamma(t)).$$



CLASSE \mathcal{C}^1

Définition 6 : Fonctions de classe \mathcal{C}^1

$f : \mathcal{U} \rightarrow F$ est dite **de classe \mathcal{C}^1** lorsque f est différentiable sur \mathcal{U} et $df : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ est continue.

Propriété 13 : Opérations

Toute combinaison linéaire, toute composée d'applications de classe \mathcal{C}^1 l'est encore.

Si M est q -linéaire et f_1, \dots, f_q sont \mathcal{C}^1 , $M(f_1, \dots, f_q)$ l'est.

Propriété 14 : Caractérisation par les applications coordonnées

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, d'applications coordonnées (f_1, \dots, f_n) dans une base de F . f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si toutes les f_i le sont.

Théorème 1 : IMPORTANT - Caractérisation avec les dérivées partielles

f est de classe \mathcal{C}^1 si et seulement si, dans une base quelconque de E , toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues.

Propriété 15 : Expression intégrale le long d'un arc

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$, $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathcal{U})$, $a = \gamma(0)$ et $b = \gamma(1)$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt.$$

Corollaire 2 : Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$

En particulier, avec $\gamma(t) = a + tv$ sur $[0, 1]$,

$$f(a+v) - f(a) = \int_0^1 df(a+tv)(v) dt = \int_0^1 D_v f(a+tv) dt.$$

Corollaire 3 : Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F)$ et \mathcal{U} est un ouvert **connexe par arcs**, alors

f est constante si et seulement si $df = 0$.



VECTEURS TANGENTS

Définition 7 : Vecteur tangent

Si X est une partie de E , $a \in X$. Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent** à X en a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$, dérivable en 0 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

On note $T_a X$ l'ensemble des vecteurs tangents à X en a .

Propriété 16 : Plan tangent pour une surface explicite

Soit \mathcal{U} ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface représentative de f , c'est-à-dire $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \mathcal{U} \text{ et } z = f(x, y)\}$.

$$\text{Soit } g : \begin{cases} \mathcal{U} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y) - z \end{cases}$$

L'ensemble $T_a S$ des vecteurs tangents à S en $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ est un plan vectoriel $P = \nabla g(a)^\perp$ de vecteur normal le vecteur (non nul) $\nabla g(a)$, donc d'équation

$$(\nabla g(a)|x, y, z) = 0.$$

On appelle **plan tangent à S en a** le plan affine $a + P$ passant par a et de direction l'ensemble P des vecteurs tangents à X en a , d'équation

$$(\nabla g(a)|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)) = 0$$

Propriété 17 : Hyperplan tangent à une surface implicite

Soit g une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} , $X = \{x \in \mathcal{U}, g(x) = 0\}$ et $a \in X$.

Si $dg(a) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$, alors

$$T_a X = \text{Ker}(dg(a)) = \nabla g(a)^\perp$$

(L'espace étant supposé euclidien pour utiliser le gradient.)

Autrement dit, X admet un hyperplan affine tangent en a qui est, $a + T_a X = a + \nabla g(a)^\perp$ d'équation

$$(\nabla g(a)|x - a) = 0.$$



Méthode 1 : Trouver une équation d'hyperplan tangent

On retiendra que dans tous les cas, mieux vaut repasser par une équation **implicite** $g(x) = 0$ pour trouver une équation d'hyperplan tangent.

Le théorème précédent donne alors une équation du dit hyperplan tangent en un point a n'annulant pas la dg .

Par exemple, le plan tangent à la surface S d'équation $g(x, y, z) = 0$ en $a = (x_0, y_0, z_0)$ est le plan affine $a + \nabla g(a)^\perp$ passant par a et de direction le plan vectoriel $T_a S = \nabla g(a)^\perp$ de vecteur normal $\nabla g(a) \neq (0, 0, 0)$, d'équation

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

où $g(a) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$.



V OPTIMISATION (RECHERCHE D'EXTREMUMS)

Définition 8 : Point critique

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $df(a) = 0$.
Si E est euclidien, cela équivaut à $\nabla f(a) = 0$.

Propriété 18 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit \mathcal{U} **ouvert** (très important) et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathcal{U}$.
Si f présente un extremum local en a , alors a est un point critique de f , c'est-à-dire $df(a) = 0$.

Propriété 19 : Vecteurs tangents en un extremum local

Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert \mathcal{U} , X une partie de \mathcal{U} , $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et f est différentiable en a , alors

$$\forall v \in T_a X, \quad df(a)(v) = 0.$$

Autrement dit, dans le cas où E est euclidien,

$$T_a X \subset \text{Ker}(df(a)) = (\nabla f(a))^\perp$$

Théorème 2 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ où \mathcal{U} est un ouvert de E , et $X = \{x \in \mathcal{U}, g(x) = 0\}$.

Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $dg(a) \neq 0_E$, alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$.

Théorème 3 : HP : multiplicateurs de Lagrange

Soit f, g_1, \dots, g_p des fonctions numériques de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} de E et

$$X = \{x \in \mathcal{U}, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}.$$

Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_p(a)$ sont linéaires indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_p dg_p(a).$$

Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.