Équations Différentielles Linéaires

I Révisions de MP2I

1 Équations différentielles du premier ordre

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

a Définitions

Définition 1 : EDL 1

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL 1) toute équation du type

$$(L)\ \forall\, t \in D,\quad ,\alpha(t)f'(t)+\beta(t)f(t)=\gamma(t)$$

où α, β, γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inonnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation

$$\alpha(t)y'+\beta(t)y=\gamma(t)$$

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation

$$(H)\ \alpha(t)y'+\beta(t)y=0$$

est appelée **équation homogène associée à** (L).

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquelles $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha, \beta, \gamma \text{ sont continues.}}$ On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L)\quad y'+a(t)y=b(t)$$

avec $a=\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H)\quad y'+a(t)y=0$.

b Résolution de l'équation homogène

Propriété 1 : Solutions de l'équation homogène

*Soit (H) $y'+a(t)y=0$ avec a continue sur I. Les solutions de (H) sont les fonctions $f:\ t\in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$, où A désigne **une** primitive de a.*

Méthode 1 : Raccord de solution (voir aussi fin du chapitre)

Des raccords de solutions sont nécessaires aux points où la fonction a s'annule.

Pour effectuer un raccord de solutions, on résout l'équation sur les intervalles où a ne s'annule pas. **Il est primordial d'indexer les constantes en fonction de l'intervalle**.

On raisonne alors par analyse-synthèse.

Analyse Si f est solution raccordée (donc sur un intervalle où a peut s'annuler), elle est solution sur les intervalles où a ne peut pas s'annuler, d'où une expression de f sur **chacun** de ces intervalles (avec des constantes a priori différentes). f doit aussi être dérivable sur tout cet intervalle.

On traduit alors dans l'ordre le fait que f soit solution au(x) point(s) de raccord, qu'elle y soit continue et enfin dérivable jusqu'à obtenir suffisamment d'information sur les constantes.

Synthèse On vérifie réciproquement qu'avec ces conditions on a bien la dérivabilité sur l'intervalle et le fait que f vérifie l'équation.

c Équations avec second membre

Théorème 1 : Structure de l'ensemble des solutions

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, (L) $y'+a(t)y=b(t)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors $f\in S_L \Longleftrightarrow f-f_0\in S_H$ soit

$$S_L=\{f_0+h,\ h\in S_H\}=f_0+S_H.$$

Méthode 2 : Résoudre une EDL 1

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisée $y'+ay=b$ sur un intervalle sur lequel les fonctions a et b sont continues.

- On résout l'équation homogène associée $y'+ay$ à l'aide d'une primitive A de a : les solutions sont les fonctions $t\mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $t\mapsto f_0(t)+\lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$.

Propriété 2 : Principe de superposition

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a,b définies sur I avec $b(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k b_k(t)$ où les α_k sont des scalaires et les b_k des fonctions. Si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, f_k est une solution particulière de (L_k) $y'+a(t)y=b_k(t)$, alors $f_0=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k$

est solution de (L) $y' + a(t)y = b(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k(t)$.

Méthode 3 : variation de la constante

A partir des solutions de l'équation homogène d'une EDL 1 : $t \mapsto \lambda g(t)$, on cherche une solution particulière de la forme $f_0 : t \mapsto \varphi(t)g(t)$ avec φ dérivable.

On traduit par équivalence que f_0 est solution ce qui conduit à une expression de φ', puis de φ par calcul de primitive.

2 Équations différentielles du second ordre

a Définitions

Définition 2 : EDL 2

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL 2) toute équation du type

$$(L) \quad \forall t \in D, \quad \alpha(t)f''(t) + \beta(t)f'(t) + \gamma(t)f(t) = \delta(t)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $f : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D. On note cette équation (L) $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t)$.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation (H) $\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

b Résolution de l'équation homogène

Propriété 3 : Solutions d'une EDL 2 homogène à cœfficients constants

Soit (E) $ar^2 + br + c = 0$ *équation caractéristique associée à* (H) $ay'' + by' + cy = 0$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

(i) *Si* (E) *possède deux solutions distinctes* $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$, *les solutions de* (H) *sont les fonctions*

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.

(ii) *Si* (E) *possède une solution double* $r \in \mathbb{K}$, *les solutions de* (H) *sont les fonctions*

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)e^{rt}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{K}^2$.

(iii) *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *si* (E) *ne possède pas de solution dans* $\mathbb{R}$, *il y a deux solutions complexes conjuguées* $\alpha \pm i\omega \in \mathbb{C}$.

Les solutions de (H) *sont les fonctions*

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{\alpha t}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ *soit encore les*

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto K\cos(\omega t + \varphi)e^{\alpha t}$$

avec $(K, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

c Équations avec second membre

Théorème 2 : Structure de l'ensemble des solutions

Soient D *une partie de* $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$ *et* δ *définie sur* D, (L) $ay'' + by' + cy = \delta(t)$, S_L *l'ensemble de ses solutions,* (H) *l'équation homogène associée est* S_H *l'ensemble de ses solutions.*

Si f_0 *est solution (particulière) de* (L), *alors* $f \in S_L \iff f - f_0 \in S_H$ *soit* $S_L = \{f_0 + f,\ f \in S_H\} = f_0 + S_H$.

Méthode 4 : Résoudre une EDL 2 à cœfficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants $ay'' + by' + cy = \delta(t)$,

- on résout l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ à l'aide des solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$: les solutions sont les fonctions $t \mapsto Af_1(t) + Bf_2(t)$ avec $A, B \in \mathbb{K}$ et f_2, f_2 données par la propriété vue précédemment (on rappelle qu'il suffit de trouver deux solutions indépendantes ie non colinéaires).
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $t \mapsto f_0(t) + Af_1(t) + Bf_2(t)$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

Le principe de superposition reste valable, on sait trouver une solution particulière pour quelques seconds membres simples.

- S'il est constant, c'est facile.
- S'il est sous forme polynôme-exponentielle :

Méthode 5 : Second membre polynôme-exponentielle

On sait trouver les solutions de l'équation homogène. Reste à trouver $\boxed{\text{une}}$ solution particulière. On utilise la propriété suivante :

Propriété 4 : Forme d'une solution particulière avec second membre polynôme-exponentielle

Si le second membre est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$ *où* P *polynôme : il existe* $\boxed{\text{une}}$ *solution de la forme* $t \mapsto Q(t)t^k e^{\lambda t}$ *avec* $\deg Q = \deg P$ *et* k *est l'ordre de* λ *comme racine de l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$ *(0, 1 ou 2, donc.)*

Il suffit donc de poser $f_0 : t \mapsto Q(t)t^k e^{\lambda t}$ avec Q de même degré que P et de traduire par équivalente que f_0 est solution pour trouver les cœfficients de Q.

On peut alors conclure en sommant f_0 et une solution quelconque de l'équation homogène associée.

On peut aussi faire un changement de fonction inconnue en posant $z(t) = y(t)e^{-\lambda t}$ et chercher une solution polynomiale sur le même principe que la recherche de solution DSE d'EDL.

- S'il est sous forme d'un polynôme-sinus ou d'un polynôme-cosinus :

Méthode 6 : Second membre polynôme-cosinus ou polynôme-sinus

Pour une EDL 2 de la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t) \text{ ou } P(t)\sin(\omega t)$$

avec $a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}[X]$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega t) = \mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \text{ et } \sin(\omega t) = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right).$$

On a facilement que si f est solution d $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, alors, comme $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay'' + by' + cy = P(t)\cos(\omega t)$ et $ay'' + by' + cy = P(t)\sin(\omega t)$.

On trouvera donc $\boxed{\text{une}}$ solution de la forme

$$t \mapsto t^k Q(t)(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t))$$

où k est l'ordre de $\lambda = \mathrm{i}\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc) et $Q \in \mathbb{R}[X]$ de même degré que P.

- S'il est polynomial :

Méthode 7 : Second membre polynomial

On cherche une solution polynomiale en commençant par trouver le terme de plus haut degré : on écrit $f_0 : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$.

Puis on compare les termes de plus haut degré dans chaque membre de l'équation différentielle, ce qui permet de trouver n.

Enfin, on traduit par équivalence que notre fonction polynomiale du bon degré est solution ce qui permet de trouver ses cœfficients.

C'est même principe que la recherche de solution développable en série entière (et pour cause !)

On peut aussi utiliser la propriété avec le second membre polynôme-exponentielle dans le cas où $\lambda = 0$.

II GÉNÉRALITÉS

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie non nulle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Position du problème

On s'intéresse à des systèmes différentiels du type

$$\begin{cases} x_1' &= a_{1,1}(t)x_1 + a_{1,2}(t)x_2 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{2,1}(t)x_1 + a_{2,2}(t)x_2 + \cdots + a_{2,n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n' &= a_{n,1}(t)x_1 + a_{n,2}(t)x_2 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

les fonctions $a_{i,j}$ et b_i étant données.

On cherche les solutions d'un tel système, c'est-à-dire les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dérivables sur un certain intervalle I telles que, pour tout t dans I,

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) &= a_{1,1}(t)\varphi_1(t) + a_{1,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{1,n}(t)\varphi_n(t) + b_1(t) \\ \varphi_2'(t) &= a_{2,1}(t)\varphi_1(t) + a_{2,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{2,n}(t)\varphi_n(t) + b_2(t) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_n'(t) &= a_{n,1}(t)\varphi_1(t) + a_{n,2}(t)\varphi_2(t) + \cdots + a_{n,n}(t)\varphi_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

2 Écriture matricielle

Un système différentiel linéaire s'écrit matriciellement

$$X' = A(t)X + B(t) \qquad (L)$$

où A est la fonction à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les fonctions composantes dans la base canonique sont les $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, autrement dit $A : t \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B : t \mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$. Une solution de (L) est une application $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ au moins dérivable sur I et vérifiant

$$\forall t \in I \qquad \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) + B(t).$$

3 Équation scalaire d'ordre n

Définition 3 : EDL n

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle solution de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

toute fonction f n fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$,

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)f(t) = b(t).$$

Propriété 5 : Écriture matricielle

Une telle équation se réécrit sous forme d'un système différentiel $X' = A(t)X + B(t)$ en posant

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4 Problèmes de Cauchy et théorème de Cauchy linéaire

Propriété 6 : Écriture intégrale de solution à un problème de Cauchy

Soit A et B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

*Φ est solution du **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

si et seulement si $\Phi \in \mathscr{C}^0(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ telle que

$$\forall\, t \in I, \quad \Phi(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] \mathrm{d}u.$$

Théorème 3 : de Cauchy linéaire

*Soit A et B deux applications **continues sur** I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement, $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Démonstration : hors programme

Une idée est de trouver un point fixe de $T : \Phi \mapsto \left(t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(u)\Phi(u) + B(u)\right] \mathrm{d}u\right)$... mais on n'a pas les outils pour le faire facilement (suites de Cauchy)... Il existe d'autres méthodes... ■

Corollaire 1 : Cas des équations scalaires d'ordre n

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, si $t_0 \in I$, si $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, il existe une unique solution f sur I de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)y = b(t) \qquad (L)$$

*telle que $f(t_0) = y_0$, $f'(t_0) = y_1, \ldots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ (encore appelé **problème de Cauchy**).*

Corollaire 2 : Exponentielle d'une somme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\boxed{u \circ v = v \circ u,}$

$$\exp(u+v) = \exp u \circ \exp v = \exp v \circ \exp u.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\boxed{AB = BA,}$

$$\exp(A+B) = \exp A \times \exp B = \exp B \times \exp A.$$

5 Application des exponentielles à la résolution de systèmes différentiels à cœfficients constants

Théorème 4 : Expression exponentielle des solutions d'un système à cœfficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les solutions à l'équation différentielle $X' = AX$ sont les fonctions $t \mapsto \exp(tA)C$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

L'unique solution au problème de Cauchy $X' = AX$ et $X(t_0) = X_0$ est la fonction $t \mapsto \exp((t - t_0)A)X_0$.

Méthode 8 : Cas diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** diagonalisable.

On diagonalise : $A = PDP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = DY$ qui se résout très simplement (système différentiel diagonal). Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

On obtient alors, en notant $V_1, \ldots V_n$ la base de vecteurs propres constituant les colonnes de P et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A correspondantes, que les solutions sont les

$$\boxed{t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{e}^{\lambda_k t} V_k}$$

pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$. On retrouve ce résultat en exprimant les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tD) \times P^{-1}C = P \times \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}\right) \times C'$$
$$= \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 t} V_1 \;\cdots\cdots\; \mathrm{e}^{\lambda_n t} V_n\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Méthode 9 : Cas trigonalisable non diagonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** trigonalisable non diagonalisable.

On trigonalise : $A = PTP^{-1}$ et on pose $Y = P^{-1}X$ ce qui se ramène à $Y' = TY$ triangulaire qui se résout de bas en haut. Reste à écrire $X = PY$ pour trouver toutes les solutions (inutile de calculer P^{-1}).

De nouveau, on peut exprimer les solutions sous la forme

$$\exp(tA) \times C = P \times \exp(tT) \times P^{-1}C$$

où $\exp(tT)$ est encore triangulaire, avec, sur la diagonale, les exponentielles des cœfficients diagonaux de tT, mais les autres cœfficients ne se calculent pas simplement en général.

Méthode 10 : Cas non trigonalisable

On souhaite résoudre une équation $X' = AX$ où A est une matrice **constante** non trigonalisable.

Alors $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On résout dans $\mathbb{C}$ et on cherche les solutions réelles.

6 Point de vue vectoriel

Propriété 7 : Écriture intégrale de solution à un problème de Cauchy

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.
f est solution du ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} \forall\, t \in I, \quad x'(t) = [a(t)]\,(x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

si et seulement si $f \in \mathscr{C}^0(I,E)$ telle

$$\forall\, t \in I, \quad f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big([a(u)]\,(f(u)) + b(u)\big)\,\mathrm{d}u.$$

Théorème 5 : de Cauchy linéaire

Soit a et b deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ et E respectivement, $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \big[a(t)\big](x(t)) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Tous les résultats qui suivent seront énoncés matriciellement mais pourront sur le même schéma, être traduits vectoriellement.

7 Principe de superposition

Propriété 8 : Principe de superposition

Soient A, B deux applications continues sur I à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ respectivement tel que $B = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i B_i$ où les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et les B_i sont continues de I dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, Φ_i est une solution de $(E_i)\quad X' = A(t)X + B_i(t)$, alors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \Phi_i$ est solution de $(E)\quad X' = A(t)X + B(t)$.

III Structure de l'espace des solutions

On note

$$X' = A(t)X + B(t) \tag{L}$$

et

$$X' = A(t)X \tag{H}$$

l'équation homogène associée, ainsi que S_L et S_H leurs ensembles de solutions respectifs.

1 Équation homogène

Théorème 6 : de structure de l'équation homogène

Si $A \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathscr{C}(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, et $\dim S_H = n$.

Propriété 9 : S_H est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Pour tout $t_0 \in I$ et tout $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\Phi \mapsto \Phi(t_0)$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels) de S_H sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Corollaire 3 : Cas des équations d'ordre n

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\,y = 0$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

2 Équation complète

Définition 4 : Sous-espace affine

On dit que la partie $\mathscr{F}$ de l'espace vectoriel E est un sous-espace affine de E lorsqu'il existe un sous-espace vectoriel F de E et un $x \in E$ tels que

$$\mathscr{F} = x + F = \{x + u, \quad u \in F\}$$

F est alors unique, et est appelé direction de $\mathscr{F}$. En revanche, pour n'importe quel $x \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} = x + F$.

Théorème 7 : de structure de l'équation complète

L'ensemble S_L des solutions de l'équation « complète » (L) est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^1(I, \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, de direction S_H, donc de dimension n.

Corollaire 4 : Cas des équations d'ordre n

Si $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$ sont continues sur I, l'ensemble des solutions de l'équation « complète »

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\,y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée, donc de dimension n.

IV ÉDL scalaires d'ordre 2

1 Position du problème, système associé

Les équations différentielles linéaire d'ordre 1 ont été étudiées en première année et les résultats des parties précédentes permettent de retrouver ceux du programme de MP2I.
Les équations différentielles linéaire d'ordre 2 étudiées alors se restreignaient au cas des cœfficients constant et d'un second membre combinaison linéaire de « polynômes-exponentielles ».
La théorie vue cette année permet d'étendre l'étude à toutes les équations à cœfficients et second membre continus.
On suppose donc que a, b, c, d sont quatre fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x) \tag{L}$$

d'équation homogène associée

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{H}$$

On se ramène à un système différentiel d'ordre 1 **en supposant que** a **ne s'annule pas sur** I (très important) et en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$:

$$Y' = A(x)Y + B(x) \qquad (L_{mat})$$

où $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(x)}{a(x)} & -\frac{b(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d(x)}{a(x)} \end{pmatrix}$: f est solution de (L) si et seulement si $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ est solution de (L_{mat}).

2 Existence et unicité, structure

Les résultats vus à l'ordre n se traduisent pour $n = 2$.

Théorème 8 : Structures des ensembles de solutions, EDL 2

On suppose, toujours, que a, b, c, d sont continues sur I et que a ***ne s'annule pas sur*** I.

- *Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (L) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$ (problème de Cauchy).*
- *L'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ (donc de dimension 2).*
- *Pour tout $x_0 \in I$, $f \mapsto \big(f(x_0), f'(x_0)\big)$ est un isomorphisme de S_H dans $\mathbb{K}^2$.*
- *L'ensemble S_L des solutions de (L) est un plan affine de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction S_H : $S_L = f_0 + S_H$ où f_0 est une solution particulière.*
- *Le principe de superposition s'applique.*

3 Wronskien

Remarquons que le couple (f, g) est une base de solutions de (H) si et seulement si le couple (Φ, Ψ) où $\Phi = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$ et $\Psi = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ en est un de (H_{mat}) $\quad Y' = A(x)Y$ (une implication est évidente, et l'autre n'est pas difficile).

Définition 5 : Wronskien

Si f, g sont deux solutions de (H) sur I, on définit sur I leur **wronskien**

$$w(f, g) \;:\; x \longmapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - g(x)f'(x).$$

Propriété 10 : Base de solutions et wronskien

Soit f, g deux solutions de l'équation différentielle homogène

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (H)$$

où a, b, c sont trois fonctions continues sur I, a ne s'annulant pas sur I. On note w (au lieu de $w(f, g)$) le wronskien de f et g. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *(f, g) est libre ie une base de S_H (on parle aussi de système fondamental de solutions).*

(ii) $\forall x \in I, \quad w(x) \neq 0$.

(iii) $\exists x \in I, \quad w(x) \neq 0$.

4 Cas où on connaît déjà une solution de (H)

Méthode 11 : Trouver une deuxième solution de (H)

Lorsqu'une solution f de (H) est connue et ne s'annule pas sur I, on peut chercher une deuxième solution sous la forme $g : x \mapsto \lambda(x)f(x)$ avec λ deux fois dérivable. C'est une méthode de variation de la constante.

Si f s'annule, cela peut aussi fonctionner parfois.

5 Cas où les cœfficients sont polynomiaux

Méthode 12

Lorsque les cœfficients et le second membre sont polynomiaux, on peut essayer l'une des méthode suivantes pour trouver des solutions de (H)

- Trouver une solution sous la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$: particulièrement efficace pour les équations de la forme $\beta x^2 y'' + \gamma x y' + \delta y = 0$ où β, γ, δ sont des scalaires, dites d'Euler.
- Trouver des solutions polynomiales, en commençant par les termes de plus haut degré pour trouver le degré.
- Trouver des solutions DSE.
- Lorsque l'on connaît déjà une solution, utiliser la méthode du paragraphe précédent.

6 Variation des constantes

Méthode 13 : Variation des constantes

Connaissant une base (f, g) de solutions de (H), on cherche une solution particulière f_0 de (L) telle que

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_0' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$$

avec λ, μ deux fonctions dérivables sur I.

Cela revient à poser supposer $f_0 = \lambda f + \mu g$ et $f_0' = \lambda f' + \mu g'$ et alors $\lambda' f + \mu' g = 0$.

En réinjectant dans l'équation (L), on trouve un système en λ' et μ' puis on les détermine et on primitive.

Ce système sera systématiquement

$$\boxed{\lambda' \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} + \mu' \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{pmatrix}}$$

où $\dfrac{d}{a}$ est le second membre de l'équation normalisée.

Connaissez **par cœur** ce système et utilisez-le directement en pratique.

V EXEMPLES D'ÉDL SCALAIRES NON NORMALISÉES

Il s'agit d'équations différentielles de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

ou

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

où a, b, c, d sont continues sur I mais où a peut éventuellement s'annuler.

Méthode 14 : Raccord de solutions

Pour résoudre une équation différentielle scalaire non normalisée, on résout classiquement sur chaque intervalle I_k sur lequel a ne s'annule pas **en prenant soin d'indexer la ou les constantes par l'indice k de l'intervalle.** Puis, on fait un raccord de solution en raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse

- On traduit qu'on est solution sur chaque intervalle I_k avec l'expression trouvée.
- On traduit l'équation aux points d'annulation de a pour obtenir éventuellement la valeur de la solution en ces points.
- On traduit la dérivabilité de la solution aux point de raccord en commençant en général par s'intéresser à la continuité.

  Pour la dérivabilité, on utilise des taux d'accroissement ou des développements limités.

  Le théorème de la limite de la dérivée est intéressant, mais on peut avoir des solutions dérivables au point de raccord sans être de classe $\mathscr{C}^1$.

Synthèse Une fois les informations trouvées sur les constantes, la synthèse valide les solutions.