EXERCICE 56 analyse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

1- f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'OUVERT $\mathbb{R}^2$

les extremums locaux de f sont parmi ses pts critiques.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 6x^2 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto 6x - 6y$$

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + x^2 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Pts critiques : $(0,0)$ et $(-1,-1)$

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x,y) \mapsto 12x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x,y) \mapsto 6$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (x,y) \mapsto -6$

$$S = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad S' = H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

$\det S = -36 < 0$ donc $S \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $-S \notin S_2^{++}(\mathbb{R})$: $\operatorname{Sp} S = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda > 0$ et $\mu < 0$.

Mais dans les directions des droites propres, f atteint un min (resp. max) local $^{(*)}$ donc f présente en $(0,0)$ un point selle.

$\det S' = 12 \times 6 - 6 \times 6 > 0$ donc f présente en $(-1,-1)$ un extremum local.

$\operatorname{tr} S' = -12 - 6 < 0$ f admet deux vp réelles strictement négative.

f présente en $(-1,-1)$ un maximum local.

(*) Soit e $\vec{vp}$ associé à $\lambda > 0$

$$f((0,0)+te) - f(0,0) \underset{t\to 0}{\overset{(DL_2)}{\sim}} \frac{1}{2}(te)^T \times H_f(0,0)(te) = \lambda\frac{t^2}{2} \times e^T e = \frac{\lambda t^2}{2}\|e\|^2 > 0$$ min local le long de $\mathbb{R}e$.

Soit e' $\vec{vp}$ associé à $\mu < 0$

$$f((0,0)+te') - f(0,0) \underset{t\to 0}{\sim} \mu\frac{t^2}{2}\|e'\|^2 < 0$$ max local le long de $\mathbb{R}e'$

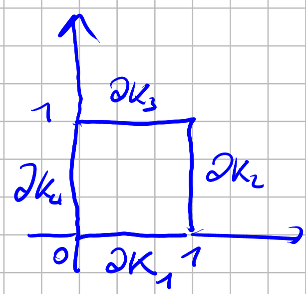
2- S'il y a un extremum global, c'est en $(-1,-1)$.

$$\left[\begin{aligned} f(x,y) - f(-1,-1) &= 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2 - (-2+6-3+2) \\ &= 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 1 \\ f(-1+h,-1+k) &= 2(-1+h)^3 + 6(-1+h)(-1+k) - 3(-1+k)^2 - 1 \end{aligned}\right]$$

Astucieusement, $f(x,0) = 2x^3+2 \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$ donc f ne présente pas d'extremum global.

3- $K = [0,1]^2$ compact car produit de compacts.

Par théorème des bornes atteintes, f C^0 sur K atteint sur K un max global.



Dans l'ouvert $\mathring{K}$, f n'admet pas de pts critique donc ce max global n'est pas atteint dans $\mathring{K}$.

Sur ∂K_1 : $x \in [0,1]$, $f(x,0) = 2x^3+2$ atteint un max en $x=1$ valant 4.

Sur ∂K_2 : $y \in [0,1]$, $f(1,y) = 2+6y-3y^2+2 = 4+6y-3y^2 = g(y) = 4-3(y^2+2y)$
$= 7-3(y+1)^2$

$g' : y \mapsto 6 - 6y \geqslant 0$ (nul en 1) donc g str. $\nearrow$ sur $[0,1]$ ou avec la 2° expression

f atteint sur ∂K_2 un max en $y = 1$ valant 7.

Sur ∂K_3 : $x \in [0,1]$, $f(x,1) = 2x^3 + 6x - 1 = h(x)$

$h' : x \mapsto 6x^2 + 6 > 0$ donc h str. $\nearrow$ sur $[0,1]$

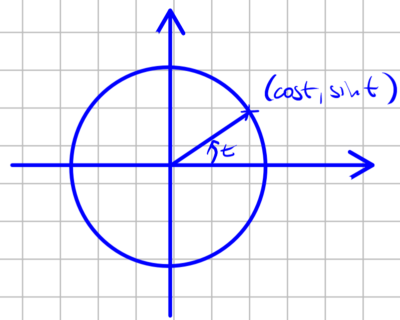
f atteint sur ∂K_3 un max en $x = 1$ valant 7.

Sur ∂K_4 : $y \in [0,1]$ et $f(0,y) = 2 - 3y^2 \searrow$ atteint un max en $y = 0$ valant 2.

Donc le max global de f vaut 7 et est atteint en $(1,1)$ uniquement.

Exo 15 : $m = \min\limits_{x^2+y^2=1} xy$

1ère méthode : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=1\} = \mathcal{C}(0,1) = \{(\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}\}$



Alors

$m = \min\limits_{t\in\mathbb{R}} \cos t \sin t$ Or $\cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$

donc $\boxed{m = -\frac{1}{2}.}$

2e méthode : $x^2 + y^2 = 1 \iff y = \pm\sqrt{1-x^2}$ avec $x \in [0,1]$

$m = \min\left(\min\limits_{x\in[0,1]} \underbrace{x\sqrt{1-x^2}}_{\geqslant 0},\ \min\limits_{x\in[0,1]} \underbrace{-x\sqrt{1-x^2}}_{\leqslant 0} \right)$

Si $x \in [0,1]$

$-x\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{x^2-x^4} = -\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$ minimal lorsque $\left|x^2-\frac{1}{2}\right|$ minimal ie lorsque $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$

et vaut en ce point $-\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$

donc $\boxed{m = -\frac{1}{2}.}$

Exo 16 : $f : (x,y) \mapsto xy$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

$g : (x,y) \mapsto x^2+y^2-1$ $\quad X = \{(x,y),\ g(x,y)=0\} = \{(x,y),\ x^2+y^2=1\} = \mathcal{C}(0,1)$

X est compact (fermé borné en df) donc f C^0 admet sur X un minimum global (thm des bornes atteintes).

en (x_0, y_0).

$$\nabla g(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0) \neq (0,0) \text{ car } (0,0) \notin X.$$

Par thm d'optimisation sous contrainte, $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$= (2\lambda x_0, 2\lambda y_0)$.

Or $\nabla f(x_0,y_0) = (y_0, x_0)$.

Donc $\begin{cases} y_0 = 2\lambda x_0 \\ x_0 = 2\lambda y_0 \\ x_0^2+y_0^2 = 1 \end{cases}$ donc $y_0 = 4\lambda^2 y_0$. Si $y_0 = 0$, alors $x_0 = 0$ NON.

C'est donc $y_0 \neq 0$ donc $4\lambda^2 = 1$ donc $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

donc $y_0 = \pm x_0$.

donc $(x_0, y_0) \in \{(x_0, x_0), (x_0, -x_0)\} \cap X$

donc $(x_0, y_0) \in \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

<u>Images par</u> f : $\quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

Donc $\min_X f = -\frac{1}{2}$ ... et $\max_X f = +\frac{1}{2}$

<u>Exo 17</u> : $f : (x, y) \longmapsto 4x^2 + 12xy - y^2$ sur $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2 + y^2 = 13\} = \mathscr{C}((0,0), \sqrt{13})$

de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$

$g : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 - 13$ $\quad \mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

$\mathscr{C}$ compact de $\mathbb{R}^2$, f C^0 donc atteint un min et un max sur $\mathscr{C}$.

$\nabla g(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0) \neq (0,0) \notin \mathscr{C}$

Par thm d'optimisa° sous contrainte, les coord. des pts du min et du max de f sur $\mathscr{C}$

vérifient $\quad \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ $\quad$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

donc $\begin{cases} \overset{4}{\cancel{8}} x_0 + \overset{6}{\cancel{12}} y_0 = \cancel{2} \lambda x_0 \\ \overset{6}{\cancel{12}} x_0 - \cancel{2} y_0 = \cancel{2} \lambda y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 13 \end{cases}$ $\quad$ donc $\begin{cases} 6 y_0 = (\lambda - 4) x_0 \\ 6 x_0 = (\lambda + 1) y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 = 13 \end{cases}$

donc $(\lambda+1)(\lambda-4)\, x_0 = 6(\lambda+1)\, y_0 = 36\, x_0$

Si $x_0=0$, alors $y_0=0$ mais $(0,0) \notin \mathcal{C}$

Donc $x_0 \neq 0$, et $(\lambda+1)(\lambda-4) = 36 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

donc $\lambda^2 - 3\lambda - 40 = 0 = (\lambda+5)(\lambda-8)$

* Pour $\lambda = -5$, $6y_0 = -9\, x_0$ ie $y_0 = -\frac{3}{2} x_0$

  donc $x_0^2 + \frac{9}{4} x_0^2 = 13$ donc $x_0^2 = \frac{13}{13/4} = 4$ donc $(x_0, y_0) \in \{(2,-3), (-3,2)\}$

* Pour $\lambda = 8$, $6y_0 = 4x_0$ ie $y_0 = \frac{2}{3} x_0$

  donc $x_0^2 + \frac{4}{9} x_0^2 = 13$ donc $x_0^2 = \frac{13}{13/9} = 9$ donc $(x_0, y_0) \in \{(3,2), (-3,-2)\}$

On calcule enfin $\begin{cases} f(2,-3) = f(-3,2) = -65 \\ f(3,2) = f(-3,2) = 104 \end{cases}$ min global de f sur $\mathcal{C}$

max global de f sur $\mathcal{C}$

Exo 18 :

$f : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} x_i$

$C_s = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = s\}$

$g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i - s$

C_s compact car fermé borné de $\mathbb{R}^n$ de dif.

$\mathbb{R}_+^n \cap g^{-1}(\{0\})$ où g continue.

$C_s \subset S_1(0,1)$

f bornée et atteint ses bornes sur C_s.

f, g $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ (ouvert).

$\nabla g(x,y) = (1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0)$

Par thm d'optimisation sous contrainte, si un extremum de f sur C_s est atteint en $(x_1, \dots, x_n)$ alors on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tq

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n)$$

$$\left(\prod_{i=2}^{n} x_i, \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne 2}} x_i, \dots, \prod_{i=1}^{n-1} x_i\right)$$

donc $\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = s \\ \forall j \in [\![1, n]\!], \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne j}} x_i = \lambda \end{cases}$

On a donc $\lambda x_1 = \lambda x_2 = \dots = \lambda x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$

Soit $\lambda = 0$, et alors l'un des x_i est nul donc $f(x_1, \dots, x_n) = 0 = \min_{C_S} f$

Soit $\lambda \neq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda x_i}_{\text{tous égaux}} = \lambda S = n \times \lambda x_j$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.

donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j = \frac{S}{n}$.

Or $f\left(\frac{S}{n}, \dots, \frac{S}{n}\right) = \left(\frac{S}{n}\right)^n$ qui est le maximum de f sur C_S.

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\quad x_1 \times \dots \times x_n \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^n$

ie $\boxed{\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i}$ (cf aussi convexité de $\ln$).