24

Calcul différentiel et optimisation : cas de $\mathbb{R}^n$

Dans tout le chapitre, $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$.

I Dérivées partielles

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

Définition 1 : Application partielle

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ une fonction, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, n]\!]$. On appelle j^e **application partielle de f en a** l'application $x \longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$

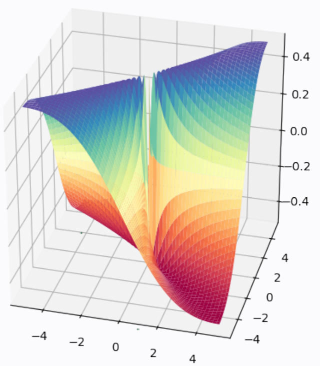
Remarque

R 1 – Si $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in F$ est une fonction de n variables, la continuité des applications partielles $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ (les x_j pour $j \neq i$ étant fixés) ne garantit pas celle de f.

Exemple

E 1 –

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Lemme 1 : « de partition »

Soit A une partie de E, $f : A \to \mathbb{R}^m$, B_1, B_2 deux parties de A telles que $B_1 \cup B_2 = A$, $a \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, $\ell \in F = \mathbb{R}^m$

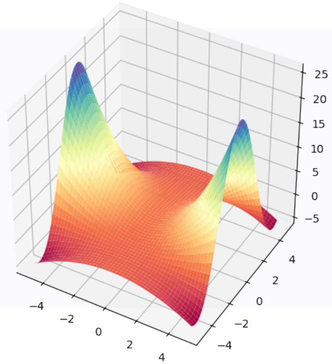
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} f|_{B_1}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ f|_{B_2}(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \end{cases}$$

En particulier, si $a \in A$, f est continue en a.

Exemple

E 2 –

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1 + x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1 + x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$



2 Dérivées partielles

$\mathscr{U}$ est toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

R 2 – Le domaine de définition d'une application partielle peut être compliqué, mais c'est toujours un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1, n]\!]$. On appelle j^e **dérivée partielle de f en a**, lorsqu'elle existe, la dérivée de la j^e application partielle de f en a. On note $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle j^e **dérivée partielle** la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarque

R 3 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la j^e dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j.

$$\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t-a_j} \xrightarrow[t\to a_j]{} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

R 4 – En général, $n = 2$ ou 3. Si $p = 2$, par exemple, on note plutôt $f(x,y)$ que $f(x_1,x_2)$. On notera alors volontiers $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les deux dérivées partielles selon la PREMIÈRE ou la DEUXIÈME variable. En mathématiques, on dérive selon une position et non « par rapport à une variable », dont le nom n'importe pas.

> **Exemple**
>
> **E 3 –** $f : (y,x) \mapsto xy^2$
>
> Que désigne dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}$??

Définition 3 : Vecteur gradient

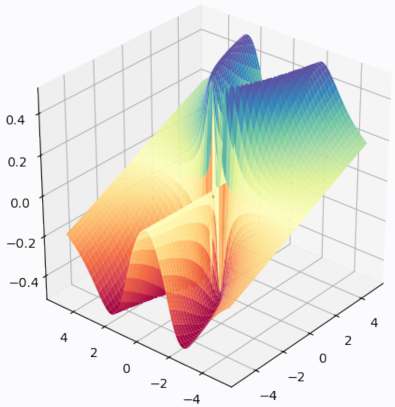
Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Exemple

E 4 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Les application partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

Remarque

R 5 – Et donc ⚠ l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

Définition 4 : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On note $f = (f_1,\dots,f_m)$: f_i est la i^e composante de f.

On dit que f admet des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a.

On appelle alors j^e **dérivée partielle de** f **en** a le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)\right) \in \mathbb{R}^m$$

Exemple

E 5 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (r,\theta,\phi) \mapsto \left(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\right).$$

Définition 5 : Matrice jacobienne

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On note $f = (f_1,\dots,f_m)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de** f **en** a la matrice

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

dim à l'arrivée — dim au départ

Remarque

R 6 – Cœfficient (i,j) : dérivée de f_i par rapport à x_j, dans l'ordre.

R 7 – $J_f(a) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Donc si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c'est une matrice ligne : la transposée du gradient $(\nabla f(a))^\top$ en confondant m-uplet et vecteur colonne.

Et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, c'est une matrice colonne. En fait, $J_f(a) = f'(a)$ en confondant toujours m-uplet et vecteur colonne.

Exemple : Matrice jacobienne de changement de variables

- **E 6 –** Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :
$$f : (r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$
- **E 7 –** Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :
$$f : (r,\theta,z) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$
- **E 8 –** Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :
$$f : (r,\theta,\phi) \longmapsto \left(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\right).$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^m)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété 1 : Équivalence avec les fonctions coordonnées

On note $f = (f_1, \dots, f_m)$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété 2 : Structure d'algèbre

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R}^m)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Remarque

- **R 8 –** Il suffit donc de travailler sur les fonctions $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$.
- **R 9 –** On rappelle que l'on note, pour $f : E \to F$, $f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(h)$ ou $f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(\|h\|_E)$ lorsque
$$\|f(h)\|_F \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(\|h\|_E),$$
autrement dit lorsque
$$\frac{\|f(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}.$$

Cela revient aussi à écrire que
$$f(h) = \|h\|_E\,\varepsilon(h)$$
où
$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F.$$
Comme on travaille en dimension finie, n'importent quelles normes conviennent.

Théorème 1 : DL$_1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in \mathscr{U}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \mathscr{U}$,

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) \underset{h\to 0}{+} o(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \underset{h\to 0_E}{+} o(h)$$

en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. où $h = (h_1, \dots, h_n)$

où $o(h) = \|h\| \times \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_{\mathbb{R}}$ Admis provisoirement. □

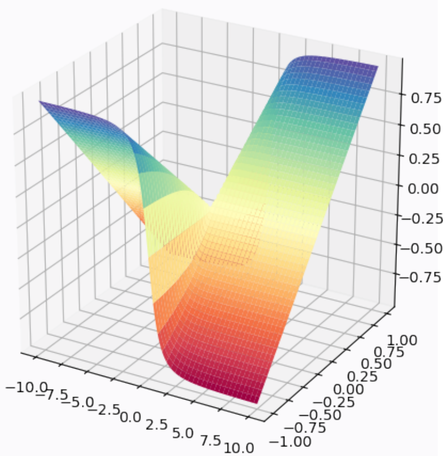
Corollaire 1 : $\mathscr{C}^1 \Longrightarrow$ continue

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

Preuve : $h \to 0$ dans le DL 1 □

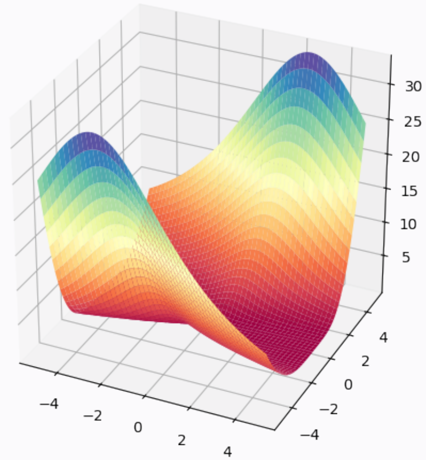
Exercice 1 : CCINP 33

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Exercice 2 : CCINP 52

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Exercice 3 : Changement de variable et gradient en polaire

Soit $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $V =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$,

$$g : \begin{vmatrix} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{vmatrix}$$

$\vec{e_r} =$ $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}\,'(\theta)$. $= \vec{e_\theta}$

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.
2. Si $(r,\theta) \in V$, on note $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Exprimer les dérivées partielles de g en (r,θ) en fonction des dérivées partielles de f en (x,y).
3. Exprimer le gradient $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ dans la base $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g en (r,θ).

Cas particulier 1 : important – dérivée le long d'un arc

Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, en notant, pour $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$,

$$(f\circ\gamma)'(t) = x'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))$$

Propriété 3 : Règle de la chaîne

Soient $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $a \in \mathscr{U}$. Soient

$$f : \begin{vmatrix} \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathscr{V} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) \end{vmatrix}$$

et

$$g : \begin{vmatrix} \mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (y_1,\dots,y_m) & \longmapsto & g(y_1,\dots,y_m) \end{vmatrix}$$

deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f = g\circ(f_1,\dots,f_m)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))$$

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \times \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(a)$$

Corollaire 2 : Règle de la chaîne vectorielle

Soient $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $a \in \mathscr{U}$. Soient $f : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ et $g : \mathscr{V} \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j \in [\![1,n]\!]$ et $\ell \in [\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial(g_\ell\circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial(g\circ f)_\ell}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \times \frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a))$$

En particulier,

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a) \quad ⚠ \text{ ordre}$$

$p\times n \quad p\times m \quad m\times n$

Exercice 4 : Calculer les dérivées partielles de $h : (x,y) \mapsto g(x+y, xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

$(g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R})$

Exercice 5 : Calculer la dérivée de $g : t \mapsto f(ta_1,\dots,ta_n)$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ et $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^p$.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 7 : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** $k \in \mathbb{N}^*$, une dérivée $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f. Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)$$

notées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}} = \partial_{i_k,\ldots,i_1} f$ où $i_1,\ldots,i_k \in [\![1,n]\!]$.

Définition 8 : Classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^k$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que f **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Propriété 4 : Caractérisation par les applications coordonnées

On note $f = (f_1,\ldots,f_m)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

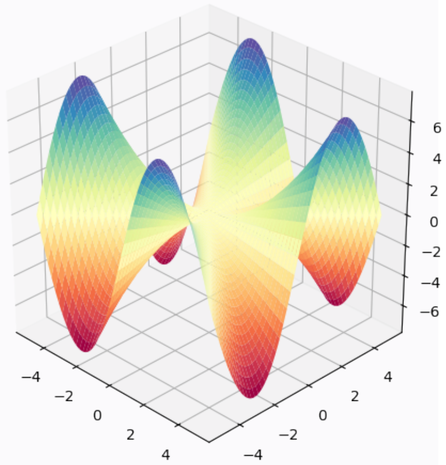
Théorème 2 : de Schwarz

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$ tel que $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exercice 6 : CCINP 57

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Exercice 7 : Contre-exemple au théorème de Schwarz : avec la fonction de l'exercice précédent (due à Péano) : calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en conclut-on ?

Propriété 5 : Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

(i) *Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ l'est encore.*

(ii) *Si $M : \mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_p} \to \mathbb{R}^m$ est p-linéaire, $f_1 : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^{n_1},\ldots,f_p : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^{n_p}$ de classe $\mathscr{C}^k$ alors $M(f_1,\ldots,f_p)$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

(iii) *Toute fonction polynomiale à n variables est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.*

(iv) *Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.*

cf 2e chapitre.

5 Matrice hessienne et DL$_2$

Définition 9 : Matrice hessienne

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle, lorsqu'elle existe, **matrice hessienne** de f en $x \in \mathscr{U}$ la matrice

$$H_f(x) = \left(\partial_{i,j} f(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Remarque

R 10 – Le théorème de Schwarz assure que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, pour tout $x \in \mathscr{U}$,

$$H_f(x) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Théorème 3 : DL$_2$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $a \in \mathscr{U}$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a+h$ reste dans $\mathscr{U}$ lorsque $h \to 0$.

En confondant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2}(H_f(a)h \mid h) \underset{h\to 0}{+o}(\|h\|^2)$$
$$= f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h \underset{h\to 0}{+o}(\|h\|^2)$$

Admis.

Remarque

R 11 – Se récrit, en posant $h = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \frac{1}{2} \sum_{1\leqslant i,j \leqslant n} h_i h_j \partial_{i,j} f(a) + \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|^2\right).$$

$\|h\|^2 \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h) \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}}$

II Applications

1 Équations aux dérivées partielles

Exemple : Quelques exemples fondamentaux

E 9 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ où $\mathscr{U} = \mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0,1)$.

E 10 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x)$ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ où $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 11 – Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y)$ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ où $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 12 – Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

E 13 – Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ dans $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Méthode 1

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u,v) = \varphi(x,y)$, en écrivant $f(x,y) = g(u,v)$ et en remplaçant soit (x,y) en fonction de (u,v), soit (u,v) en fonction de (x,y).
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et suffisamment régulier (classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

Exercice 8 : Résoudre

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y) = (x+y, x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide d'un changement de variable affine.

Exercice 10 : Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 11 : Coordonnées polaires

Soit $\mathscr{V} =]0,+\infty[\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{U}$.
Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

Exercice 12 : À l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

2 Optimisation : recherche d'extremums

Ici, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On notera plutôt n la dimension au départ : $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

a Extremums libres

Définition 10 : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en a un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $\mathscr{V}$ voisinage de a dans A tel que pour tout $x \in \mathscr{V}$, $f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).
Il est **strict** lorsque, $\forall x \in \mathscr{V} \setminus \{a\}$, , $f(x) < f(a)$ (respectivement $f(x) > f(a)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $x \in A$.

Définition 11 : Point critique

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathscr{U}$.

Lorsque $\nabla f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f.

Comme en dimension 1, une condition nécessaire d'extremum local est liée à l'annulation du terme d'ordre 1 dans le développement limité, donc du gradient.

Propriété 6 : Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1

On suppose que

H1

H2

H3

Alors

C1 *a est un point critique de f.*

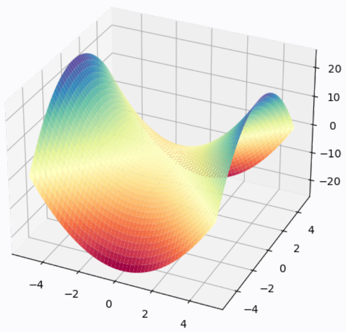
*La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé **point selle** ou **point col**.*

Exemple

E 14 –

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

présente un point selle en $(0, 0)$.



La surface porte le doux nom de *paraboloïde hyperbolique*.

Le développement limité à l'ordre 2 permet de conditionner le fait d'avoir un minimum ou un maximum local (donc un signe constant pour $f(a+h) - f(a)$) au signe du terme d'ordre 2.

Propriété 7 : Condition nécessaire de minimum local à l'ordre 2

On suppose que

H1

H2

H3

alors

C1 *a est un point critique de f.*

C2

Si c'est un maximum local en a, alors $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ie $H_f(a)$ est symétrique « négative », ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}^-$).

Si jamais, de plus, les termes d'ordre 2 du développement limité ne sont pas nuls, on obtient un équivalent pour $f(a+h) - f(a)$ ayant le même signe, ce qui permet de formuler une condition suffisante.

Propriété 8 : Condition suffisante d'extremum local à l'ordre 2

On suppose que

H1

H2

H3

H4

alors

C1

Corollaire 3 : Discussion sur le spectre

*Si $\mathscr{U}$ **ouvert**, $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathscr{U}$ point critique de f.*

- *Si $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$, f atteint en a un minimum local.*
- *Si $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$, f atteint en a un maximum local.*
- *Si $H_f(a)$ possède des valeurs propres non nulles de signes opposés, a est un point selle.*

Si $n = 2$ (fonction de 2 variables), on note

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ (théorème de Schwarz), $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique. On a $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2$ (égal produit de ses deux valeurs propres réelles) et $\mathrm{tr}\left(H_f(a)\right) = r + t$ (égal à leur somme).

1. Si $rt - s^2 > 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont même signe et sont non nulles : f **présente en a un extremum local strict.**
   (a) Si $r + t > 0$ alors $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **minimum local strict** en a.
   (b) Si $r + t < 0$ alors $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **maximum local strict** en a.
2. Si $rt - s^2 < 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont des signes opposés et sont non nulles.
   Dans ce cas, f **présente en a un point col** : dans les directions propres, on a respectivement un minimum et un maximum local.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure en général.

Méthode 2 : Recherche d'extremum

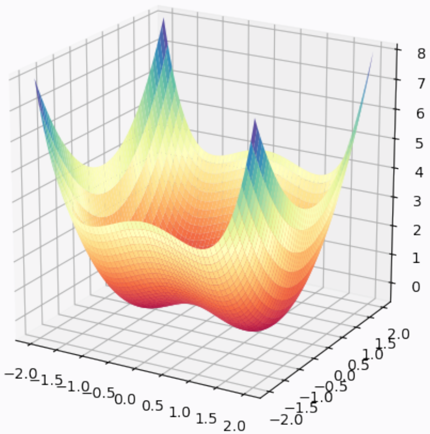
(i) Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut s'intéresser à la Hessienne aux points critiques qui permet de conclure lorsqu'elle est inversible (voir la remarque précédente pour $n = 2$.)
Sinon, pour un point critique a, on étudie $f(a+h) - f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

(iii) Si $f : K \to \mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

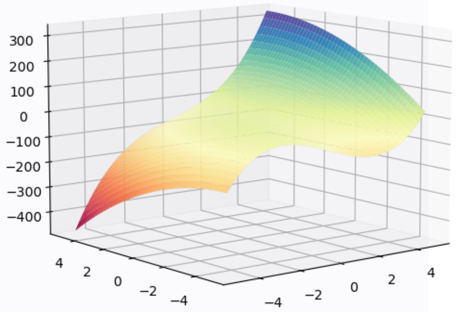
Exercice 13 : Déterminer les extremums de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$



Exercice 14 : CCINP 56

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$



b Extremums liés

On cherche désormais les extremums de $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$ non pas sur $\mathscr{U}$ entier, mais sur l'ensemble des points annulant une certaine fonction numérique $g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.

Une première approche pour calculer $\min\limits_{g(x)=0} f(x)$ consiste à paramétrer l'ensemble

$$X = \{x \in \mathscr{U},\ g(x) = 0\},$$

c'est-à-dire trouver une fonction $t \in I \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ dont X est l'image. On est alors ramené à un problème à une seule variable que l'on sait résoudre : calculer

$$\min_{t \in I} f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big).$$

Une seconde approche consiste à transformer la contrainte $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ en une ou plusieurs expressions de la forme $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (le théorème hors-programme des fonctions implicites nous assure la possibilité de le faire au voisinage d'un point tel que $\nabla g(x) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$...) puis à calculer

$$\min_{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathscr{U}'} f\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})\big)$$

où $\mathscr{U}'$ est à préciser avec les techniques précédentes.

Exercice 15 : Déterminer de deux manières différentes $\min_{x^2+y^2=1} xy$

En bleu :

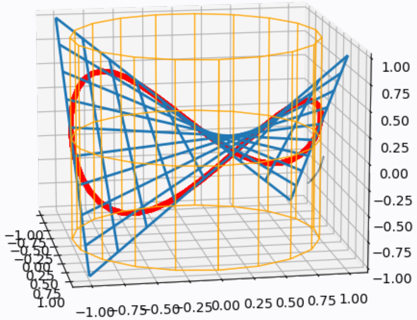
$$z = f(x,y)$$

En orange :

$$g(x,y) = 0$$

En rouge :

$$z = f_{|X}(x,y)$$



Malheureusement, en général, il n'est pas aisé de trouver un paramétrage de X ou de remplacer la contrainte implicite $g(x_1,\dots,x_n) = 0$ en contrainte explicite $x_n = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$...

On dispose au programme d'un outil permettant d'étudier ce problème.

Théorème 4 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $X = \{x \in \mathscr{U},\ g(x) = 0\}$.

Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $\nabla g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

Cette condition étant seulement nécessaire, la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte s'accompagne en général d'une recherche de point critique (sur un ouvert, bien sûr) suivi d'une étude locale, ou d'un argument de compacité.

Exercice 16 : Déterminer de nouveau $\min_{x^2+y^2=1} xy$

Exercice 17 : (Oral CCINP) Montrer que $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$ **admet un minimum et un maximum sur** $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 13\}$ **et les déterminer.**

Exercice 18 : En étudiant l'application $f : (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1 \cdots x_n$ **sur** $C_s = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ x_1 + \cdots + x_n = s\}$, **retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.**