24

Calcul différentiel et optimisation : cas de $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$. La notion de différentielle sera vue dans le prochain chapitre.

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles ~~dans une base.~~	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. ~~Lorsqu'une base de E est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\dots,x_n)$.~~
c) Opérations sur les applications différentiables	
~~Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $M(f_1,\dots,f_p)$ où M est multilinéaire et où $f_1,\dots,f_p$ sont des applications différentiables.~~	
Règle de la chaîne : différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + tv$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Dérivées partielles de $$(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m)).$$
d) Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
~~Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.~~	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	La démonstration n'est pas exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Cas particulier $\gamma(t) = a + tv$ pour tout $t \in [0,1]$.
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.
f) Optimisation : étude au premier ordre	
Point critique d'une application différentiable.	
Condition nécessaire d'existence d'un extremum local en un point intérieur.	Exemples de recherches d'extremums globaux.
Si f est une fonction numérique définie sur l'ouvert Ω, si X est une partie de Ω, si la restriction de f à X admet un extremum local en x et si f est différentiable en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ s'annule en tout vecteur tangent à X en x.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème d'optimisation sous une contrainte : si f et g sont des fonctions numériques définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert Ω de E, si X est l'ensemble des zéros de g, si $x \in X$et $\mathrm{d}g(x) \neq 0$ et si la restriction de f à X admet un extremum local en x, alors $\mathrm{d}f(x)$ est colinéaire à $\mathrm{d}g(x)$.	Si E est euclidien, traduction en termes de gradient. Exemples de recherches d'extremums sous contrainte.

g) Applications de classe $\mathscr{C}^k$

Dérivées partielles d'ordre k d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_k} \dots \partial x_{j_1}}$,$\partial_{j_k} \dots \partial_{j_1} f$,$\partial_{j_1,\dots,j_k} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Exemples simples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.

h) Optimisation : étude au second ordre

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.	Notation $H_f(x)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\cdot h, h\rangle + o(\Vert h\Vert^2)$, $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + \nabla f(x)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(x) h + o(\Vert h\Vert^2)$.	La démonstration n'est pas exigible.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si f admet un minimum local en x, alors x est point critique de f et $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.	Adaptation au cas d'un maximum local.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si x est point critique de f et si $H_f(x) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en x.	Adaptation au cas d'un maximum local. Explicitation pour $n=2$ (trace et déterminant).

Plan du cours

Dans tout le chapitre, $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^m$, $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $E=\mathbb{R}^n$.

I Dérivées partielles

Dans cette partie, $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

1 Compléments sur la continuité des fonctions de variable vectorielle

Définition 1 : Application partielle

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ une fonction, $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathscr{U}$, $j\in[\![1,n]\!]$. On appelle **j^{e} application partielle de f en a** l'application $t\mapsto f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n)$.

Remarque

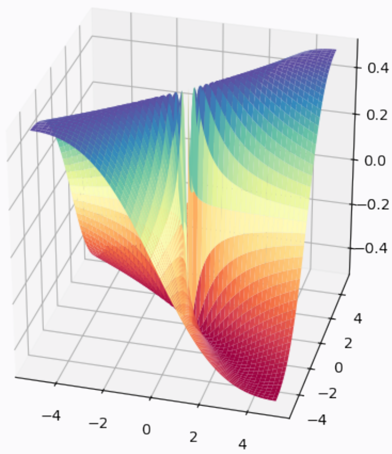
R 1 – Si $f:(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mapsto f(x_1,\dots,x_n)\in F$ est une fonction de n variables, la continuité des applications partielles $x_i\mapsto f(x_1,\dots,x_n)$ (les x_j pour $j\neq i$ étant fixés) ne garantit pas celle de f.

Exemple

E 1 –

$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

a des applications partielles $x\mapsto f(x,0)=0$ et $y\mapsto f(0,y)=0$ continue en 0, mais est discontinue en $(0,0)$ car $f(x,x)\not\to 0$.



Lemme 1 : « de partition »

Soit A une partie de E, $f:A\to\mathbb{R}^m$, B_1,B_2 deux parties de A telles que $B_1\cup B_2=A$, $a\in\overline{B}_1\cap\overline{B}_2$, $\ell\in F$. Si $f_{|B_1}(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$ et $f_{|B_2}(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$, alors $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$.

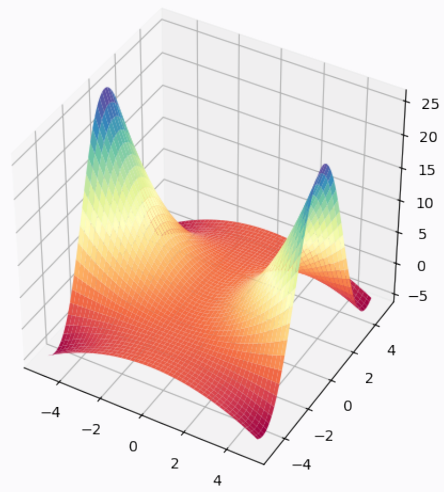
En particulier, si $a\in A$, f est continue en a.

Exemple

E 2 –

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1+x^2)\sin y}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1+x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.



2 Dérivées partielles

$\mathscr{U}$ est toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque

R 2 – Le domaine de définition d'une application partielle peut être compliqué, mais c'est toujours un ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 2 : Dérivées partielles

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathscr{U}$, $j \in [\![1,n]\!]$. On appelle **j^e dérivée partielle de f en a**, lorsqu'elle existe, la dérivée de la j^e application partielle de f en a. On note $\partial_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ le nombre dérivé en ce point.

On appelle **j^e dérivée partielle** la fonction définie sur $\mathscr{U}$ par $a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Remarque

R 3 – Comme on en a déjà l'habitude, calculer la j^e dérivée partielle revient à fixer les coordonnées selon tous les autres vecteurs de bases et dériver par rapport à la seule variable x_j.

$$\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},t,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t-a_j} \xrightarrow[t\to a_j]{} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

R 4 – En général, $n = 2$ ou 3. Si $n = 2$, par exemple, on note plutôt $f(x,y)$ que $f(x_1,x_2)$. On notera alors volontiers $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ les deux dérivées partielles selon la PREMIÈRE ou la DEUXIÈME variable. En mathématiques, on dérive selon une position et non « par rapport à une variable », dont le nom n'importe pas.

Exemple

E 3 – $f : (y,x) \mapsto xy^2$

Que désigne dans ce cas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$??

Définition 3 : Vecteur gradient

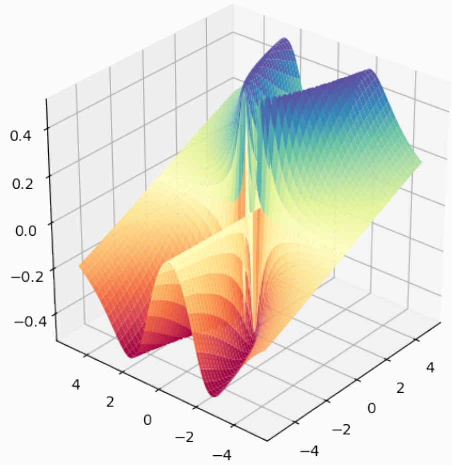
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \mathcal{U}$. On appelle **gradient** de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple

E 4 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Les application partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ sont-elles continues en 0 ?

f est-elle continue en $(0,0)$?

Remarque

R 5 – Et donc ⚠ l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité !

Définition 4 : Extension aux fonctions à valeurs vectorielles

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. On note $f = (f_1, \dots, f_m)$: f_i est la i^{e} composante de f.

On dit que f admet des dérivées partielles en $a \in \mathcal{U}$ si chacune des f_i admet une dérivée partielle en a.

On appelle alors j^{e} **dérivée partielle de f en a** le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)\right).$$

Exemple

E 5 – Dérivées partielles en tout point de

$$f : (r,\theta,\phi) \mapsto \left(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\right).$$

Définition 5 : Matrice jacobienne

Soit $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. On note $f = (f_1, \dots, f_m)$. On appelle, lorsque existe, **matrice jacobienne de f en a** la matrice

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

Remarque

R 6 – Cœfficient (i,j) : dérivée de f_i par rapport à x_j, dans l'ordre.

R 7 – $J_f(a) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Donc si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c'est une matrice ligne : la transposée du gradient $(\nabla f(a))^\mathsf{T}$ en confondant m-uplet et vecteur colonne.

Et si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, c'est une matrice colonne. En fait, $J_f(a) = f'(a)$ en confondant toujours m-uplet et vecteur colonne.

Exemple : Matrice jacobienne de changement de variables

E 6 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées polaires :

$$f : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

E 7 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées cylindriques :

$$f : (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

E 8 – Matrice jacobienne du changement de variables en coordonnées sphériques :

$$f : (r,\theta,\phi) \mapsto \left(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta\right).$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 6 : Classe $\mathscr{C}^1$

Soit $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ lorsqu'en tout point de $\mathscr{U}$, les dérivées partielles de f existent, et que ces dérivées partielles sont continues.

On note $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R}^m)$ l'ensemble de ces fonctions.

Propriété 1 : Équivalence avec les fonctions coordonnées

On note $f = (f_1,\dots,f_m)$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Propriété 2 : Structure d'algèbre

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R}^m)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Remarque

R 8 – Il suffit donc de travailler sur les fonctions $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}$.

R 9 – On rappelle que l'on note, pour $f : E \to F$, $f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(h)$ ou $f(h) \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(\|h\|_E)$ lorsque

$$\|f(h)\|_F \underset{h\to 0_E}{=} \mathrm{o}(\|h\|_E),$$

autrement dit lorsque

$$\frac{\|f(h)\|_F}{\|h\|_E} \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_\mathbb{R}.$$

Cela revient aussi à écrire que

$$f(h) = \|h\|_E\,\varepsilon(h)$$

où

$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0_E]{} 0_F.$$

Comme on travaille en dimension finie, n'importent quelles normes conviennent.

Théorème 1 : DL$_1$

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a\in\mathscr{U}$. Pour tout $h\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h\in\mathscr{U}$,

$$f(a+h)=f(a)+h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\cdots+h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|)=f(a)+\left(\nabla f(a)\middle|h\right)+\underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(\|h\|).$$

en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

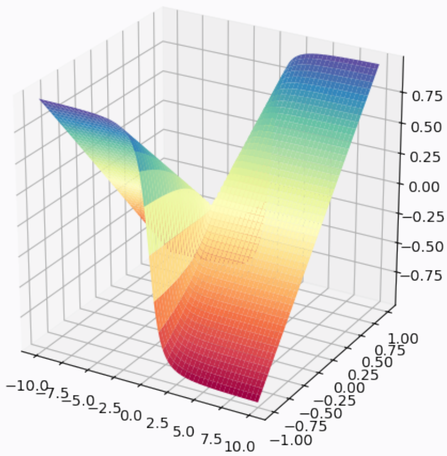
Admis provisoirement. ∎

Corollaire 1 : $\mathscr{C}^1\implies$ continue

Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue.

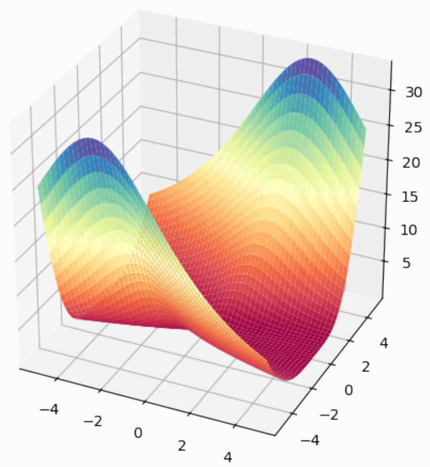
Exercice 1 : CCINP 33

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$



Exercice 2 : CCINP 52

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$



Propriété 3 : Règle de la chaîne

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{U} & \longrightarrow & \mathscr{V}\\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\big)\end{array}\right.$$

et

$$g:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{V} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (y_1,\dots,y_m) & \longmapsto & g(y_1,\dots,y_m)\end{array}\right.$$

deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f=g\circ(f_1,\dots,f_m)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Démonstration

Admis provisoirement. ■

Exercice 3 : Changement de variable et gradient en polaire

Soit $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $V=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $f\in\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$,

$$g:\left|\begin{array}{ccc}V & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{array}\right.$$

$\vec{u}(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ **et** $\vec{v}(\theta)=\vec{u}\,'(\theta)$.

1. **Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.**
2. **Si $(r,\theta)\in V$, on note $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Exprimer les dérivées partielles de g en (r,θ) en fonction des dérivées partielles de f en (x,y).**
3. **Exprimer le gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ dans la base $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ en fonction des dérivées partielles de g en (r,θ).**

1. Facile.
2. $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. et $\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u}(\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)\vec{v}(\theta)$.

Cas particulier 1 : important – dérivée le long d'un arc

Si $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ et $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, en notant, pour $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$,

$$(f\circ\gamma)'(t)=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))+z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)).$$

Corollaire 2 : Règle de la chaîne vectorielle

Soient $\mathscr{U},\mathscr{V}$ deux ouverts respectifs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ et $a\in\mathscr{U}$. Soient $f:\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ et $g:\mathscr{V}\to\mathbb{R}^p$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $g\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour $j\in[\![1,n]\!]$ et $\ell\in[\![1,p]\!]$,

$$\frac{\partial(g_\ell\circ f)}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial(g\circ f)_\ell}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial g_\ell}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En particulier,

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a))J_f(a).$$

Exercice 4 : Calculer les dérivées partielles de $h:(x,y)\mapsto g(x+y,xy)$ par la règle de la chaîne puis par les matrices jacobiennes.

Exercice 5 : Calculer la dérivée de $g:t\mapsto f(ta_1,\dots,ta_n)$ où $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ et $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^p$.

4 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 7 : Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^m$. On appelle **dérivée partielle d'ordre** $k\in\mathbb{N}^*$, une dérivée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ où φ est une dérivée partielle d'ordre $k-1$ de f. Les dérivées partielles d'ordre k sont de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\cdots\right)\right)$$

notées $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}=\partial_{i_k,\dots,i_1}f$ où $i_1,\dots,i_k\in[\![1,n]\!]$.

Définition 8 : Classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^m$. On dit que f **est de classe $\mathscr{C}^k$** si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

On dit que f **est de classe $\mathscr{C}^\infty$** si elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Propriété 4 : Caractérisation par les applications coordonnées

On note $f=(f_1,\dots,f_m)$, $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune des f_i l'est.

Théorème 2 : de Schwarz

Soit $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$ tel que $i\neq j$,

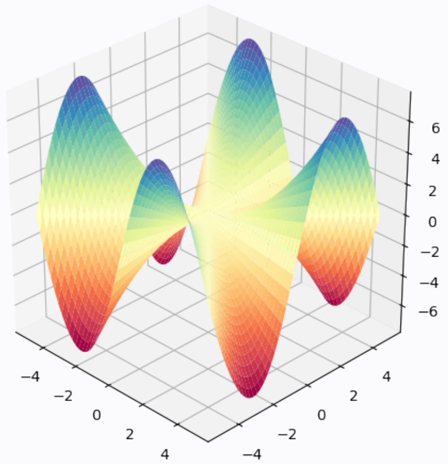
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}.$$

Démonstration

Non exigible. ■

Exercice 6 : CCINP 57

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



Exercice 7 : Contre-exemple au théorème de Schwarz : avec la fonction de l'exercice précédent (due à Péano) : calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Qu'en conclut-on ?

On trouve, en calculant les applications partielles, ou en prenant directement les taux d'accroissements, -1 et 1. On en déduit que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Propriété 5 : Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Soit $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

(i) *Toute combinaison linéaire, toute composée, tout produit, tout quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ l'est encore.*

(ii) *Si $M:\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_p}\to\mathbb{R}^m$ est p-linéaire, $f_1:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^{n_1},\dots,f_p:\mathscr{U}\to\mathbb{R}^{n_p}$ de classe $\mathscr{C}^k$ alors $M(f_1,\dots,f_p)$ est de classe $\mathscr{C}^k$.*

(iii) *Toute fonction polynomiale à n variables est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.*

(iv) *Toute fonction rationnelle (quotient de fonctions polynomiales) est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.*

Démonstration

Non exigible. ■

5 Matrice hessienne et DL$_2$

Définition 9 : Matrice hessienne

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle, lorsqu'elle existe, **matrice hessienne** de f en $x\in\mathscr{U}$ la matrice

$$H_f(x)=\left(\partial_{i,j}\right)_{\leqslant i,j\leqslant n}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque

R 10 – Le théorème de Schwarz assure que si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, pour tout $x\in\mathscr{U}$, $H_f(x)\in\mathscr{S}_p(\mathbb{R})$.

Théorème 3 : DL_2 : formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $a\in\mathcal{U}$ et $h\in\mathbb{R}^n$ tel que $a+h$ reste dans $\mathcal{U}$ lorsque $h\to 0$.

En confondant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$f(a+h)=f(a)+\left(\nabla f(a)\middle|h\right)+\frac{1}{2}\left(H_f(a)h\middle|h\right)+\underset{h\to0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

$$f(a+h)=f(a)+\nabla f(a)^\intercal h+\frac{1}{2}h^\intercal H_f(a)h+\underset{h\to0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

Démonstration

Non exigible. ■

Remarque

R 11 – Se récrit, en posant $h=(h_1,\dots,h_n)$,

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^n h_i\partial_i f(a)+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}h_ih_j\partial_{i,j}f(a)+\underset{h\to0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right).$$

II Applications

1 Équations aux dérivées partielles

Exemple : Quelques exemples fondamentaux

E 9 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ où $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2$ puis $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ puis $\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}(0,1)$.

E 10 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(x)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ où $g\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 11 – Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(y)$ dans $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ où $g\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

E 12 – Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

E 13 – Résoudre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$ dans $\mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$.

Méthode 1

- Savoir résoudre les ÉDP fondamentales auxquelles on se ramène systématiquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(x) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

- Dans la pratique, on s'y ramène via un changement de variables $(u,v)=\varphi(x,y)$, en écrivant $f(x,y)=g(u,v)$ et en remplaçant soit (x,y) en fonction de (u,v), soit (u,v) en fonction de (x,y).
- La changement de variable doit être bijectif, entre deux ouverts et suffisamment régulier (classe $\mathscr{C}^1$ ou $\mathscr{C}^2$ suivant l'ordre de l'équation.)
- S'il n'est pas donné, il doit être affine ou polaire.
- Appliquer la règle de la chaîne (ou utiliser des matrices jacobiennes) pour exprimer les dérivées de f en fonction de celle de g ou l'inverse, et simplifier l'ÉDP.

Exercice 8 : Résoudre

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide du changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y) = (x+y, x+2y)$, en vérifiant que φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La matrice du changement de variable est inversible.
Solutions : $f : (x,y) \mapsto g(x+2y)$ où $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ à l'aide d'un changement de variable affine.

Exercice 10 : Résoudre l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 11 : Coordonnées polaires

Soit $\mathscr{V} =]0,+\infty[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\varphi : \mathscr{V} \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Déterminer un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que φ soit une bijection de $\mathscr{V}$ sur $\mathscr{U}$.
Résoudre

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

sur $\mathscr{C}^1(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.

$\mathscr{U} = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
Solutions : $(x,y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_*^+)$.

Exercice 12 : À l'aide du changement de variable $(u,v) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$, résoudre sur $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Solutions : $(x,y) \mapsto xg\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right)$ où $g, h \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_*^+)$.

2 Optimisation : recherche d'extremums

Ici, toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On notera plutôt n la dimension au départ : $\mathscr{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

a Extremums libres

Définition 10 : Extremum

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$.

(i) On dit que f présente en a un **maximum** (respectivement **minimum**) local s'il existe $\mathscr{V}$ voisinage de a dans A tel que pour tout $x \in \mathscr{V}$, $f(x) \leqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(a)$).
Il est **strict** lorsque, $\forall x \in \mathscr{V} \setminus \{a\}$, , $f(x) < f(a)$ (respectivement $f(x) > f(a)$).

(ii) On dit que f présente un **maximum** (respectivement **minimum**) global si cette inégalité est en fait valable pour tout $x \in A$.

Définition 11 : Point critique

Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a\in\mathscr{U}$.
Lorsque $\nabla f(a)=0$, c'est-à-dire $\forall\, i\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$, on dit que a est un **point critique** de f.

Comme en dimension 1, une condition nécessaire d'extremum local est liée à l'annulation du terme d'ordre 1 dans le développement limité, donc du gradient.

Propriété 6 : Condition nécessaire d'extremum local à l'ordre 1

On suppose que

H1 $\mathscr{U}$ ***ouvert*** *(très important !) de* $\mathbb{R}^n$.

H2 $a\in\mathscr{U}$ *tel que* $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ *admettant des dérivées partielles en* a.

H3 f *présente un extremum local en* a.

Alors

C1 a *est un point critique de* f.

La réciproque est fausse, et un contre-exemple est appelé ***point selle*** *ou* ***point col***.

Démonstration

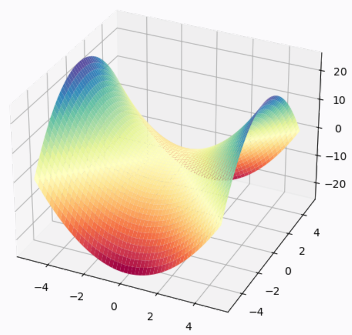
Il suffit d'appliquer, pour tout i, la propriété connue à la fonction numérique $t\mapsto f(a_1,\dots,,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)$ qui admet un extremum en a_i. ∎

Exemple

E 14 –

$$f:(x,y)\mapsto x^2-y^2$$

présente un point selle en $(0,0)$.
La surface porte le doux nom de *paraboloïde hyperbolique*.
Le seul point critique est $(0,0)$ et $f(x,0)\geqslant 0$, $f(0,y)\leqslant 0$.



Le développement limité à l'ordre 2 permet de conditionner le fait d'avoir un minimum ou un maximum local (donc un signe constant pour $f(a+h)-f(a)$) au signe du terme d'ordre 2.

Propriété 7 : Condition nécessaire de minimum local à l'ordre 2

On suppose que

H1 $\mathscr{U}$ ***ouvert*** *(très important !) de* $\mathbb{R}^n$

H2 $a\in\mathscr{U}$ *et* $f\in\mathscr{C}^2(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

H3 f *présente un minimum local en* a

alors

C1 a *est un point critique de* f.

C2 $H_f(a)\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Si c'est un maximum local en a*, alors* $-H_f(a)\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ *(ie* $H_f(a)$ *est symétrique « négative », ses valeurs propres sont toutes dans* $\mathbb{R}^-$*).*

Démonstration

En effet, on a déjà vu que a est un point critique et le DL$_2$ s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(\|h\|^2\right)$$

donc

$$h^\top H_f(a) h \sim f(a+h) - f(a) \geqslant 0$$

donc si h suffisamment petit, $h^\top H_f(a) h \geqslant 0$.

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, avec n suffisamment grand, $\left(\frac{x}{n}\right)^\top H_f(a) \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2} x^\top H_f(a) x \geqslant 0$ donc $x^\top H_f(a) x \geqslant 0$ et finalement $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. ■

Si jamais, de plus, les termes d'ordre 2 du développement limité ne sont pas nuls, on obtient un équivalent pour $f(a+h) - f(a)$ ayant le même signe, ce qui permet de formuler une condition suffisante.

Propriété 8 : Condition suffisante d'extremum local à l'ordre 2

On suppose que

H1 $\mathscr{U}$ *ouvert (très important !) de* $\mathbb{R}^n$.

H2 $a \in \mathscr{U}$ *et* $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U}, \mathbb{R})$.

H3 a *est un point critique de* f.

H4 $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$
(respectivement $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$*)*

alors

C1 f *atteint un minimum (respectivement maximum) local* ***strict*** *en* a.

Démonstration

Conséquence du DL$_2$, de nouveau. ■

Corollaire 3 : Discussion sur le spectre

Si $\mathscr{U}$ ***ouvert***, $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{U}, \mathbb{R})$ *et* $a \in \mathscr{U}$ *point critique de* f.

- *Si* $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$, f *atteint en* a *un minimum local.*
- *Si* $\mathrm{Sp}\left(H_f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$, f *atteint en* a *un maximum local.*
- *Si* $H_f(a)$ *possède des valeurs propres non nulles de signes opposés,* a *est un point selle.*

Si $n = 2$ (fonction de 2 variables), on note

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

où $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ (théorème de Schwarz), $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

On suppose que a est un point critique. On a $\det\left(H_f(a)\right) = rt - s^2$ (égal produit de ses deux valeurs propres réelles) et $\mathrm{tr}\left(H_f(a)\right) = r + t$ (égal à leur somme).

1. Si $rt - s^2 > 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont même signe et sont non nulles : f **présente en** a **un extremum local strict.**
   (a) Si $r + t > 0$ alors $H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **minimum local strict** en a.
   (b) Si $r + t < 0$ alors $-H_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et f présente un **maximum local strict** en a.
2. Si $rt - s^2 < 0$, les deux valeurs propres de $H_f(a)$ ont des signes opposés et sont non nulles.
   Dans ce cas, f **présente en** a **un point col** : dans les directions propres, on a respectivement un minimum et un maximum local.
3. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure en général.

Méthode 2 : Recherche d'extremum

(i) Soit $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles sur $\mathscr{U}$. Pour déterminer des extremums locaux de f on cherche ses points critiques.

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut s'intéresser à la Hessienne aux points critiques qui permet de conclure lorsqu'elle est inversible (voir la remarque précédente pour $n=2$.)

Sinon, pour un point critique a, on étudie $f(a+h)-f(a)$ pour h proche de 0. Comme a est un point critique, les termes obtenus dans la différence sont au moins d'ordre 2.

(ii) Si $\mathscr{U}$ n'est pas un ouvert, on le décompose en son intérieur (ouvert) et son bord. Sur le bord, on étudie « à la main », en général à l'aide d'un paramétrage du bord.

(iii) Si $f:K\to\mathbb{R}$ où K est un compact, on est assuré de l'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. On les cherche comme dans la méthode précédente.

Exercice 13 : Déterminer les extremums de

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto y^2-x^2+\frac{x^4}{2}.$$

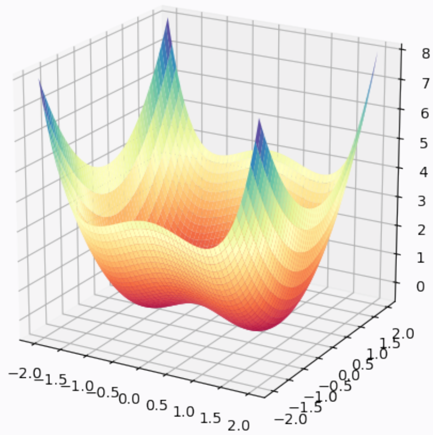
On est sur un ouvert avec une fonction $\mathscr{C}^2$.
On trouve trois points critiques : $(\pm1,0)$ et $(0,0)$.

$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}-2&0\\0&2\end{pmatrix}$ admet des valeurs propres de signe opposé donc f présente en $(0,0)$ un point selle (se retrouve en regardant $f(x,0)$ et $f(0,y)$.)

$H_f(\pm1,0)=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}\in\mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$: f présente en $(\pm1,0)$ un minimum local strict. On remarque en fait que

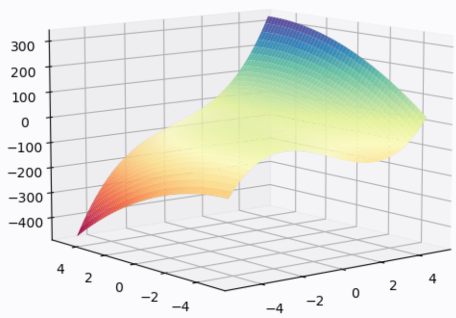
$$f(x,y)-f(\pm1,0)=y^2-x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{1}{2}=y^2+\frac{(x^2-1)^2}{2}\geqslant 0$$

donc le minimum est global.



Exercice 14 : CCINP 56

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=2x^3+6xy-3y^2+2.$$



b Extremums liés

On cherche désormais les extremums de $f:\mathscr{U}\to\mathbb{R}$ non pas sur $\mathscr{U}$ entier, mais sur l'ensemble des points annulant une certaine fonction numérique $g\in\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$.

Une première approche pour calculer $\min_{g(x)=0} f(x)$ consiste à paramétrer l'ensemble

$$X=\{x\in\mathscr{U},\ g(x)=0\},$$

c'est-à-dire trouver une fonction $t\in I\mapsto(x_1(t),\dots,x_n(t))$ dont X est l'image. On est alors ramené à un problème à une seule variable que l'on sait résoudre : calculer

$$\min_{t\in I} f\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big).$$

Une seconde approche consiste à transformer la contrainte $g(x_1,\dots,x_n)=0$ en une ou plusieurs expressions de la forme $x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ (le théorème hors-programme des fonctions implicites nous assure la possibilité de le faire au voisinage d'un point tel que $\nabla g(x)\neq 0_{\mathbb{R}^n}$...) puis à calculer

$$\min_{(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathscr{U}'} f\big(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})\big)$$

où $\mathscr{U}'$ est à préciser avec les techniques précédentes.

Exercice 15 : Déterminer de deux manières différentes $\displaystyle\min_{x^2+y^2=1} xy$

En bleu :

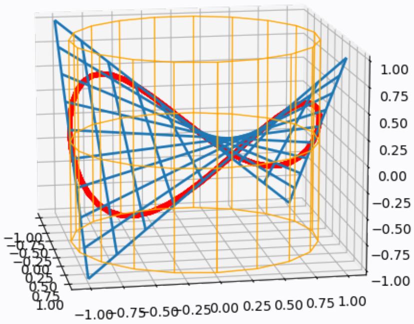
$$z=f(x,y)$$

En orange :

$$g(x,y)=0$$

En rouge :

$$z=f_{|X}(x,y)$$



Première méthode Ici, $X=\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}$ est le cercle unité. On peut le paramétrer avec $x=\cos t$ et $y=\sin t$ pour $t\in\mathbb{R}$ (ou $]-\pi,\pi]$ ou ...)

Alors $xy=\cos t\sin t=\dfrac{\sin 2t}{2}$ admet comme minimum $-\dfrac{1}{2}$ atteint par exemple pour $t=-\dfrac{\pi}{4}$, donc pour $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Deuxième méthode On cherche des équations implicites pour X : $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ pour $x\in[0,1]$.

Pour des raisons de signe, pour minimiser xy sur X, il suffit de minimiser $-x\sqrt{1-x^2}=-\sqrt{x^2-x^4}=-\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2}$ sur $[0,1]$. Le minimum est $-\dfrac{1}{2}$ atteint lorsque $x^2=\dfrac{1}{2}$ donc $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y=-\sqrt{1-x^2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve que le minimum vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Malheureusement, en général, il n'est pas aisé de trouver un paramétrage de X ou de remplacer la contrainte implicite $g(x_1,\dots,x_n)=0$ en contrainte explicite $x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$...

On dispose au programme d'un outil permettant d'étudier ce problème.

Théorème 4 : d'optimisation sous contrainte

Soient $f,g\in\mathscr{C}^1(\mathscr{U},\mathbb{R})$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $X=\{x\in\mathscr{U},\ g(x)=0\}$.
Si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a\in X$ et si $\nabla g(a)\neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\nabla f(a)$ est colinéaire à $\nabla g(a)$.

Démonstration

Admis provisoirement. ■

Un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a)$ est appelé **multiplicateur de Lagrange**.

Cette condition étant seulement nécessaire, la résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte s'accompagne en général d'une recherche de point critique (sur un ouvert, bien sûr) suivi d'une étude locale, ou d'un argument de compacité.

Exercice 16 : Déterminer de nouveau $\displaystyle\min_{x^2+y^2=1} xy$

On a $f:(x,y)\mapsto xy$ et $g:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, $X=\{(x,y),\ x^2+y^2=1\}$.

Comme X est compact (fermé borné en dimension finie) et f est continue, on est assuré de l'existence d'un minimum global de f sur X en $(x_0,y_0)\in X$ (et aussi d'un maximum global).

De plus, $\nabla g(x_0,y_0)=(2x_0,2y_0)\neq(0,0)$. Par le théorème précédent, on a $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_0,y_0)=(y_0,x_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)=(2\lambda x_0,2\lambda y_0)$$

Donc $y_0=2\lambda x_0=2\lambda(2\lambda y_0)=4\lambda^2 y_0$.
Si $y_0=0$, alors $x_0=2\lambda y_0=0$ mais $(0,0)\notin X$. C'est donc que $\lambda=\pm\frac{1}{2}$ et $(x_0,y_0)=(\pm y_0,y_0)\in X$.
On trouve alors le minimum et le maximum globaux de f sur X (qui existent bien tous les deux) atteints en $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et valant $\pm\frac{1}{2}$.

Exercice 17 : (Oral CCINP) Montrer que $f:(x,y)\mapsto 4x^2+12xy-y^2$ admet un minimum et un maximum sur $\mathscr{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2=13\}$ et les déterminer.

f est continue sur le compact $\mathscr{C}$ dont y est bornée et atteint ses bornes.
Soit $g:(x,y)\mapsto x^2+y^3-13$. Alors $\nabla(g):(x,y)\mapsto(2x,2y)$ ne s'annule qu'en $(0,0)\notin\mathscr{C}$.
Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x,y)\in\mathscr{C}\text{ et }\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$$

donc

$$\begin{cases}x^2+y^2&=13\\4x+6y&=\lambda x\\6x-y&=\lambda y\end{cases}$$

soit

$$\begin{cases}x^2+y^2&=13\\y&=\frac{\lambda-4}{6}x\\x&=\frac{1+\lambda}{6}y\end{cases}$$

Alors $x=\dfrac{(\lambda-4)(\lambda+1)}{36}x$ et comme $x\neq0$ (sinon $x=y=0$ ce qui est exclu),

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=\lambda^2-3\lambda-4=36$$

donc

$$\lambda^2-3\lambda-40=(\lambda+5)(\lambda-8)=0.$$

Pour $\lambda=-5$, On obtient $y=\frac{-3}{2}x$ puis $\left(1+\frac{9}{4}\right)x^2=13$ donc $x=\pm2$ et $y=\mp3$.
On calcule $f(2,-3)=f(-2,3)=16-72-9=-65$.
Pour $\lambda=8$, On obtient $y=\frac{2}{3}x$ puis $\left(1+\frac{4}{9}\right)x^2=13$ donc $x=\pm3$ et $y=\pm3$.
On calcule $f(3,2)=f(-3,-2)=36+72-4=104$.
Finalement, $\boxed{\max_{\mathscr{C}}f=f(3,2)=f(-3,-2)=104}$ et $\boxed{\min_{\mathscr{C}}f=f(2,-3)=f(-2,3)=-65.}$

Exercice 18 : En étudiant l'application $f:(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_1\cdots\cdots x_n$ sur $C_s=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,\ x_1+\cdots+x_n=s\}$, retrouver l'inégalité arithmético-géométrique.

f est continue sur le compact C_s dont y est bornée et atteint ses bornes.
Soit $g:(x,y)\mapsto x_1+\cdots+x_n-s$. Alors $\nabla(g):(x_1,\dots,x_n)\mapsto 1$ ne s'annule pas.
Des coordonnées du minimum et du maximum globaux vérifient alors

$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathscr{C}\text{ et }\nabla f(x_1,\dots,x_n)=\lambda\nabla(x_1,\dots,x_n)$$

donc

$$\begin{cases}x_1+\cdots+x_n&=s\\\forall i\in[\![1,n]\!],\quad\prod_{j\neq i}x_j&=\lambda\end{cases}$$

On a alors $\lambda x_1=\cdots=\lambda x_n$.
Soit $\lambda=0$ et au moins l'un des x_i est nul, donc $f(x_1,\dots,x_n)=0=\min_{C_s}f$.
Soit $\lambda=0$ et c'est le maximum de f qui va être atteint. $\lambda s=\lambda(x_1+\cdots+x_n)=n\lambda x_i$ et donc tous les x_i valent $\frac{s}{n}$. On a alors $f\left(\frac{s}{n},\dots,\frac{s}{n}\right)=\left(\frac{s}{n}\right)^n$.

Ainsi, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$,

$$x_1 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^n$$

donc

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots x_n}{n}$$

.

Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique.