23

Endomorphismes des espaces euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E, sont des espaces vectoriels euclidiens : $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

I Préliminaire : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Propriété 1 : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base ***orthonormale*** *de E, $(E_1, \dots, E_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les coefficients de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \left(e_i \,\middle|\, u(e_j)\right) = E_i^\top A E_j.$$

II Adjoint d'un endomorphisme

1 Définition

Théorème 1 : de représentation de Riesz

Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.

Corollaire 1

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Alors il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \left(u(x)\middle|y\right) = \left(x\middle|v(y)\right).$$

Définition 1 : Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **adjoint de** u, l'unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \left(u(x)\middle|y\right) = \left(x\middle|u^*(y)\right).$$

2 Propriétés

Propriété 2 : Linéarité et adjoint d'une composée

Soient E euclidien et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

$$(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*.$$

Propriété 3 : Involutivité

Soient E euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$$\left(u^*\right)^* = u.$$

Propriété 4 : Matrice de l'adjoint en base orthonormée

Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ base ***orthonormée*** *de E, $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^*\right) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right)^\top = M^\top.$$

Corollaire 2 : Caractéristiques communes

Un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même idéal annulateur, même polynôme minimal, même spectre (mais pas mêmes vecteurs propres en général), même rang, même dimension de sous-espaces propres (mais sous-espaces propres différents en général).

Propriété 5 : Sous-espace stable

Soient E euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$, F un sous-espace de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

III Matrices orthogonales

1 Définition

Définition 2 : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si $A^\top A = I_n$.

On note $\mathscr{O}(n)$ ou $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété 6 : Caractérisations des matrices orthogonales

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathcal{O}(n)$ ie $A^\top A = I_n$

(ii) A *est inversible et* $A^{-1} = A^\top$

(iii) $AA^\top = I_n$

(iv) $A^\top \in \mathcal{O}(n)$

(v) *Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

(vi) *Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel*

3 Structure

Propriété 7 : Structure du groupe orthogonal

*Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé **groupe orthogonal d'ordre** n. C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.*

4 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété 8 : Matrice de passage en bon

Soient, dans un espace euclidien E, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Définition 3 : Matrices orthogonalement semblables

Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que

$$A = PBP^\top.$$

5 Matrices orthogonales positives et négatives

Propriété 9 : Déterminant d'une matrice orthogonale

*Les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1. **La réciproque est fausse.***

Définition 4 : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif $(+1)$, dites **matrices orthogonales positives** ou **directes**. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(n)$ (Notation HP).

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives** ou **indirectes**. Les ensemble est $\mathcal{O}^-(n) = \mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$ (Notation HP).

Méthode 1 : Connaître le signe d'une matrice de $\mathcal{O}(3)$

Si $M \in \mathcal{O}(3)$, il suffit de calculer son déterminant pour savoir si elle est positive ou négative.

Mais on peut s'épargner ce calcul : on sait que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc, nécessairement, $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ (base directe ou non).

Il suffit donc de connaître une composante non nulle de $C_1 \wedge C_2$ pour savoir si $M \in \mathcal{SO}(3)$ (signe $+$) ou si $M \in \mathcal{O}^-(3)$ (signe $-$).

Seul problème : le produit vectoriel n'est plus au programme de mathématiques... Mais il est au programme de physique...

IV Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1 Définition

Définition 5 : Isométrie vectorielle

Soit $(E, |\,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**, dénomination non privilégiée par le programme) de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E. (La notation vient de la dénomination « orthogonal »).

Propriété 10 : Les isométries sont des automorphismes

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$.

2 Caractérisations

Propriété 11 : Caractérisations des isométries

Soient $(E, | \,)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *u est une isométrie vectorielle,*

(ii) *u conserve le produit scalaire :*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \big(u(x) \big| u(y)\big) = \big(x \big| y\big),$$

(iii) *u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.*

(iv) *u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.*

(v) *Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale*

(vi) *Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale*

(vii) *$u \in \mathscr{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1}$ (ie $u^* \circ u = \mathrm{id}_E$).*

Propriété 12 : Structure

*L'ensemble $\mathscr{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** E.*

Propriété 13 : Image de l'orthogonal d'un sous-espace

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

$$u\left(F^{\perp}\right) = (u(F))^{\perp}.$$

Propriété 14 : Stabilité par une isométrie

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

3 Isométries directes et indirectes

Propriété 15 : Déterminant

Une isométrie vectorielle est de déterminant ± 1. La réciproque est fausse.

Définition 6 : Rotations et isométries indirectes

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** E, noté $\mathscr{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif $(+1)$, appelées **isométries positives** ou **isométries directes** ou **rotations de** E. Il est parfois noté $\mathscr{O}^+(E)$.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Propriété 16 : Structure

L'ensemble $\mathscr{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{O}(E), \circ)$.

Propriété 17 : Caractérisation des rotations

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathscr{L}(E)$. Sont équivalentes :

(i) *u isométrie directe (rotation) de E.*

(ii) *u transforme toute bond en bond.*

(iii) *u transforme une bond en bond.*

Propriété 18 : Cas des réflexions

Toute réflexion d'un espace euclidien est une isométrie indirecte.

V Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

1 Isométries en dimension 2

a Matrices orthogonales

Propriété 19 : Description de $\mathscr{O}(2)$

$\mathscr{O}(2) = \mathscr{SO}(2) \sqcup \mathscr{O}^-(2)$ *avec*

$$\mathscr{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathscr{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Propriété 20 : Écriture complexe d'une isométrie vectorielle

$\mathbb{C}$ étant vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de base canonique $(1, \mathrm{i})$,

- *L'écriture complexe d'une isométrie directe, de matrice dans la base canonique R_θ est $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$,*
- *L'écriture complexe d'une isométrie indirecte, de matrice dans la base canonique S_θ est $z' = \mathrm{e}^{i\theta} \overline{z}$.*

Corollaire 3 : Opérations sur les matrices orthogonales

Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$

(i) $R_\theta = R_\phi \iff \theta \equiv \phi\ [2\pi]$.
(ii) $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
(iii) $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.
(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ R_\theta^k = R_{k\theta}$
(v) $S_\theta^2 = I_2$
(vi) $S_\theta \times S_\phi = R_{\theta-\phi}$
(vii) $S_\theta \times R_\phi = S_{\theta-\phi}$
(viii) $R_\theta \times S_\phi = S_{\theta+\phi}$

b Rotations du plan orienté

Propriété 21 : Description des rotation en dimension 2

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathscr{SO}(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale ***directe****, la matrice de r soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.*

On dit que r est la ***rotation vectorielle d'angle de mesure*** *θ.*

Propriété 22 : Structure

$(\mathscr{SO}(2), \times)$ est un groupe abélien.

$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$ *est un morphisme de groupes surjectif de noyau $2\pi\mathbb{R}$.*

$\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathscr{SO}(2) \\ z & \longmapsto & R_\theta \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de groupes.*

Propriété 23 : Unique rotation entre deux vecteurs unitaires

Soit x, y deux vecteurs non nuls de E. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $\dfrac{y}{\|y\|}$.

Définition 7 : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs x et y non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(x,y)}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π.

Propriété 24 : Expression du produit scalaire et du produit mixte

Soient x, y des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

$$(x|y) = \|x\|\,\|y\| \cos\widehat{(x,y)} \qquad [x,y] = \|x\|\,\|y\| \sin\widehat{(x,y)}$$

Propriété 25 : Effet sur les angles orientés

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

c Classifications des isométries du plan

Propriété 26 : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.
- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*
$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$
où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\bar{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Méthode 2 : Étudier une isométrie en dim. 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont ortho**NORM**ées).

Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ.

- Soit elle est de la forme R_θ, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation en lisant les cœfficients.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Cas général

Propriété 27 : Rappel

Si u est une isométrie de E et F stable par u, alors $F^\perp$ l'est.

Lemme 1

Si u est une isométrie de E, alors u possède une droite ou un plan stable.

Lemme 2

Si u est une isométrie de E, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Théorème 2 : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathscr{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, des entiers naturels m, p, q, des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

où, pour tout réel θ, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Théorème 3 : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathscr{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathscr{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^\top$.

3 Isométries en dimension 3

Propriété 28 : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathscr{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.

*(i) Soit $u = r \in \mathscr{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \operatorname{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé **axe de la rotation**.*

On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^\perp$.

*(e_1, e_2) est dite directe lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D **est dirigée et orientée par** a.*

On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^\perp \oplus D$, la matrice de r est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

*On dit que θ **est une mesure de l'angle de la rotation** r **(modulo 2π).***

(ii) (Hors-Programme) Soit $u \in \mathscr{O}^-(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ composée commutative d'une rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une réflexion de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).

Propriété 29 : Caractéristiques d'une rotation en dimension 3

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E.

- *Son axe est l'ensemble de ses vecteurs invariants.*
- *Si θ est une mesure de son angle, alors $\operatorname{tr} r = 2\cos\theta + 1$.*
- *Le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[x, r(x), a]$ où a est un vecteur directeur orientant l'axe (non nécessairement unitaire) et x un vecteur n'appartenant pas à l'axe (en général pris dans la base canonique).*

Méthode 3 : Étude d'isométries en dim.3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariants, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

VI Endomorphismes autoadjoints

1 Définition

Définition 8 : Endomorphisme autoadjoint

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **autoadjoint** (ou **symétrique**) lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x) \big| y\big) = \big(x \big| u(y)\big)$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété 30 : Matrice en bon d'un endomorphisme autoadjoint

Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** *de l'espace euclidien E, $u \in \mathcal{L}(E)$.*

u est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

3 Cas des projections

Propriété 31 : CNS pour qu'un projecteur soit orthogonal

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$) si et seulement s'il est autoadjoint (symétrique).

4 Sous-espaces stables

Propriété 32 : Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Si F stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi.

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème 4 : spectral (version 1)

$u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u.

Théorème 5 : spectral (version 2)

Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormale : $u \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 6 : spectral (version 3)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthodiagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{\mathsf{T}} = PDP^{-1}.$$

6 Positivité, défini-positivité

Définition 9 : Endomorphisme autoadjoint positif, défini-positif

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **positif** lorsque

$$\forall x \in E,\quad \big(x \big| u(x)\big) \geqslant 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ de tels endomorphismes.
On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **défini positif** lorsque

$$\forall x \in E,\quad \big(x \big| u(x)\big) > 0$$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ de tels endomorphismes.

Définition 10 : Matrice symétrique positive, définie-positive

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive** lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad X^{\mathsf{T}} A X \geqslant 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de telles matrices.
On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **défini-positive** lorsque

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad X^{\mathsf{T}} A X > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de telles matrices.

Propriété 33 : Caractérisation spectrale

- *$u \in \mathcal{S}(E)$ est positif ssi $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^+$.*
- *$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive ssi $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^+$*
- *$u \in \mathcal{S}(E)$ est défini-positif ssi $\operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}_*^+$.*
- *$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est défini-positive ssi $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}_*^+$.*

7 Annexe classique (HP) : formules variationnelles, norme subordonnée et rayon spectral

E est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Les notions suivantes ne sont pas au programme mais se retrouvent très fréquemment dans des sujets d'écrit.

Propriété 34 : Caractérisation de la norme euclidienne

Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \max_{\|y\|=1} \big(x \big| y\big) = \max_{\|y\| \leqslant 1} \big(x \big| y\big)$.

Propriété 35 : Norme subordonnée de l'adjoint

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.

Propriété 36 : Formules variationnelles

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. *Alors* $x \mapsto \frac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ *atteint sur* $E \setminus \{0_E\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} u)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} u)$.

Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $X \mapsto \frac{X^\top S X}{X^\top X}$ *atteint sur* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} S)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} S)$.

Définition 11 : Rayon spectral

Le **rayon spectral** de $u \in \mathscr{L}(E)$ est $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

Propriété 37 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas autoadjoint

Si $u \in \mathscr{S}(E)$, *alors* $\rho(u) = |||u|||$.

Propriété 38 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas général

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, *alors* $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.