# 22

# Endomorphismes des espaces euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés $E$, sont des espaces vectoriels euclidiens : $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire.

## I Préliminaire : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

Voici une propriété qui nous sera utile tout au long de ce chapitre.

**Propriété 1 : matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale**

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base* ***orthonormale*** *de $E$, $(E_1, \dots, E_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les coefficients de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ sont donnés par*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\quad a_{i,j} \underset{\mathscr{B}\text{ bon}}{=} (e_i|u(e_j)) = E_i^T A E_j$$

$\mathscr{B}$ bon

où $E_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^e$

## II Adjoint d'un endomorphisme

Nous allons enfin pouvoir donner une interprétation géométrique à la seule opération matricielle pour laquelle on ne l'avait pas encore fait.

Commençons par rappeler un résultat vu dans le chapitre précédent.

**Théorème 1 : de représentation de Riesz**

*Soit $a \in E$ euclidien et $\Phi_a : x \in E \mapsto (a|x)$. Alors*

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \end{array} \right.$$

*est un isomorphisme.*

*Ainsi, pour tout forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, il existe un unique élément $a \in E$ tel que $\varphi = (a|\cdot)$.*

**Corollaire 1**

*Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$.*
*Alors il existe un unique endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que*

$$\forall x,y \in E,\quad (u(x)|y) = (x|v(y))$$

**Définition 1 : Adjoint d'un endomorphisme**

Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **adjoint de** $u$, l'unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\forall x,y \in E,\quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

**Exemple**

E 1 – Adjoint de l'identité, de l'endomorphisme nul et plus généralement d'une homothétie.

**Propriété 2 : Linéarité et adjoint d'une composée**

*Soient $E$ euclidien et $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$(u+\lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$$

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

**Propriété 3 : Involutivité**

*Soient $E$ euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors*

$$(u^*)^* = u$$

**Propriété 4 : Matrice de l'adjoint en base orthonormée**

*Soient $E$ euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base **orthonormée** de $E$, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = M^T$$

**Remarque**

R1 – Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a aucune raison pour que la matrice de $u^*$ soit la transposée de celle de $u$.

R2 – Permet de retrouver très facilement les résultats précédents !

**Corollaire 2 : Caractéristiques communes**

*Un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même idéal annulateur, même polynôme minimal, même spectre (mais pas mêmes vecteurs propres en général),* même rang.

**Propriété 5 : Sous-espace stable**

*Soient $E$ euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, $F$ un sous-espace de $E$. Si $F$ est stable par $u$, alors*

$F^\perp$ stable par $u^*$.

**Remarque**

R3 – La réciproque est bien sûr vraie.

**Exercice 1 : Classique : montrer que l'image et le noyau de $u^*$ sont respectivement l'orthogonal du noyau de $u$ et l'orthogonal de l'image de $u$**

$$\boxed{\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp}$$

**Exercice 2 : CCINP 63**

# III Matrices orthogonales

## 1 Définition

**Définition 2 : Matrice orthogonale**

Une matrice carrée $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ est dite ***orthogonale*** si et seulement si

$$A^T A = I_n$$

On note $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## 2 Caractérisations

**Propriété 6 : Caractérisations des matrices orthogonales**

*Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.*
*Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $A \in \mathcal{O}(n)$ ie $A^T A = I_n$

(ii) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^T$

(iii) $AA^T = I_n$

(iv) $A^T \in \mathcal{O}(n)$

(v) les colonnes de $A$ forment une famille (base) orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le p.s. canonique.

(vi) les lignes de $A$ forment une famille (base) orthonormale de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$

La bonne méthode pour mq $M \in \mathcal{O}(n)$

**Remarque**

R4 – ⚠ La matrice est orthoGONale si et seulement si ses colonnes sont orthoNORmales.

**Exemple**

E 2 –

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3 : $\mathcal{O}(n)$ est compact.**

## 3 Structure

**Propriété 7 : Structure du groupe orthogonal**

$(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe

## 4 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

**Propriété 8 : Matrice de passage en bon**

*Soient, dans un espace euclidien $E$, $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de $E$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

*$\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de $E$ si et seulement si $P$ est orthogonale.*

**Remarque**

R 5 – **Rappel : Changement de b.o.n.** Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. de $E$ euclidien, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $\cancel{X}$ $u$ $\in \mathcal{L}(E)$ :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{\mathsf{T}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

**Définition 3 : Matrices orthogonalement semblables**

Deux matrices carrées $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe

$P \in \mathcal{O}(n)$ tel que $A = P^T B P$

**Remarque**

R 6 – Cela signifie donc que $A$ et $B$ représentent un même endomorphisme dans des bases **orthonormales** éventuellement différentes.

**Exercice 4 : Classique : décomposition QR**

**Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.**

1. **Montrer l'existence d'une matrice $Q \in \mathcal{O}(n)$ et d'une matrice $R$ triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.**

   *On pourra interpréter $A$ comme matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la base formée des vecteurs colonnes de $A$ et orthonormaliser cette dernière.*
2. **Si $(Q_0, R_0)$ est un couple qui convient, trouver tous les couples solution.**

## 5 Matrices orthogonales positives et négatives

**Propriété 9 : Déterminant d'une matrice orthogonale**

*Les matrices orthogonales sont de déterminant $\pm 1$. **La réciproque est fausse.***

**Remarque**

R 7 – Une erreur classique est de considérer que la réciproque est vraie.

**Définition 4 : Groupe spécial orthogonal**

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre** $n \in \mathbb{N}^*$, noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif $(+1)$, dites **matrices orthogonales positives** ou **directes**. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(n)$ (Notation HP).

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives** ou **indirectes**. Les ensemble est $\mathcal{O}^-(n) = \mathcal{O}(n) \setminus \mathcal{SO}(n)$ (Notation HP).

**Remarque**

**R 8 –** Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice orthogonale positive.

### Méthode 1 : Connaître le signe d'une matrice de $\mathcal{O}(3)$

Si $M \in \mathcal{O}(3)$, il suffit de calculer son déterminant pour savoir si elle est positive ou négative.

Mais on peut s'épargner ce calcul : on sait que les colonnes de $M$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Donc, nécessairement, $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ (base directe ou non).

Il suffit donc de connaître une composante non nulle de $C_1 \wedge C_2$ pour savoir si $M \in \mathcal{SO}(3)$ (signe $+$) ou si $M \in \mathcal{O}^-(3)$ (signe $-$).

Seul problème : le produit vectoriel n'est plus au programme de mathématiques... Mais il est au programme de physique...

# IV Isométries vectorielles d'un espace euclidien

## 1 Définition

**Définition 5 : Isométrie vectorielle**

Soit $(E, |\ )$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**, dénomination non privilégiée par le programme) de $E$ tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de $E$. (La notation vient de la dénomination « orthogonal »).

**Propriété 10 : Les isométries sont des automorphismes**

*Soit $E$ un espace euclidien. Les isométries vectorielles de $E$ sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$.*

$\|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| = \|x-y\|$

**Remarque**

**R 9 –** En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{d}(u(x), u(y)) = \mathrm{d}(x, y)$ : $u$ conserve les distances.

**R 10 –** Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathcal{O}(E, |\ )$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.

**R 11 –** Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas. Attention donc au vocabulaire !

## 2 Caractérisations

**Propriété 11 : Caractérisations des isométries**

*Soient $(E, |\ )$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$u$ est une isométrie vectorielle,* $(\forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|)$

(ii) *$u$ conserve le produit scalaire :*

$$\forall x, y \in E, \ (u(x) | u(y)) = (x | y)$$

(iii) $u$ transforme UNE bon de $E$ en bon.

(iv) $u$ transforme TOUTE bon de $E$ en bon.

(v) Il existe $\mathcal{B}$ bon de $E$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$

(vi) $\forall \mathcal{B}$ bon de $E$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$

(vii) $u \in \mathcal{GL}(E)$ et $u^* = u^{-1}$

**Remarque**

**R 12 –** Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve les distances et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire.

**R 13 –** Un automorphisme $u$ est une isométrie si et seulement si $\forall x, y \in E, \ (u(x)|y) = \left(x \middle| u^{-1}(y)\right)$.

**R 14 –** Si $A$ est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de $u^{-1}$ dans cette même base est $A^{-1} = A^\top$.

**R 15 –** Être représenté par une matrice orthogonale en base *orthogonale* seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique $(e_1, e_2)$, l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme !) bien que $A$ soit une matrice orthogonale.

$u(e_1) = 2e_2$ donc $\begin{cases} \|e_1\| = 1 \\ \|u(e_1)\| = 2 \end{cases}$

ie on a décidé qu'une base $\mathcal{B}$ est directe
Alors $\mathcal{B}'$ directe ssi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0$
(les autres sont les bases indirectes.

**Propriété 12 : Image de l'orthogonal d'un sous-espace**

*Soient $E$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.*

$$u(F^{\perp}) = (u(F))^{\perp}$$

**Propriété 13 : Stabilité par une isométrie**

*Soient $E$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.*

Si $F$ stable par $u$, $F^{\perp}$ l'est aussi.

## 3 Isométries directes et indirectes

**Propriété 14 : Déterminant**

*Une isométrie vectorielle est de déterminant $\pm 1$. La réciproque est fausse.*

**Définition 6 : Rotations et isométries indirectes**

Si $E$ espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de** $E$, noté $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de $E$ de déterminant positif $(+1)$, appelées **isométries positives** ou **isométries directes** ou **rotations de** $E$. Il est parfois noté $\mathcal{O}^{+}(E)$.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

**Propriété 15 : Structure**

*L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de $E$ est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal de** $E$.*

*$\mathcal{SO}(E)$ en est un sous-groupe.*

**Exercice 5 : CCINP 78**

**Propriété 16 : Caractérisation des rotations**

*Soit $E$ euclidien orienté, $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

(i) *$u$ isométrie directe (rotation) de $E$.*

(ii) *$u$ transforme* TOUTE base orthonormale directe en bond

(iii) *$u$ transforme* UNE bond en bond.

(marche encore avec boni)

**Propriété 17 : Cas des réflexions**

*Toute réflexion d'un espace euclidien ~~orienté~~ est une isométrie* indirecte.

$\longrightarrow$ passage de $\mathcal{SO}(E)$ à $\mathcal{O}^-(E)$.

# V Réduction des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

## 1 Isométries en dimension 2

### a Matrices orthogonales

**Propriété 18 : Description de $\mathcal{O}(2)$**

$\mathcal{O}(2) = \mathcal{SO}(2) \sqcup \mathcal{O}^{-}(2)$ *avec*

$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

**Remarque**

R 16 – L'écriture est de plus unique si on suppose en outre $\theta \in ]-\pi, \pi]$.

**Propriété 19 : Écriture complexe d'une isométrie vectorielle**

*$\mathbb{C}$ étant vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de base canonique $(1, \mathrm{i})$,*

- *L'écriture complexe d'une isométrie directe, de matrice dans la base canonique $R_\theta$ est* $z' = e^{i\theta} z$
- *L'écriture complexe d'une isométrie indirecte, de matrice dans la base canonique $S_\theta$ est* $z' = e^{i\theta} \overline{z}$

**Corollaire 3 : Opérations sur les matrices orthogonales**

*Soit $\theta, \phi \in \mathbb{R}$*

(i) $R_\theta = R_\phi \iff \theta \equiv \phi \ (2\pi)$

(ii) $R_\theta R_\phi = R_{\theta+\phi}$

(iii) $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

(iv) $\forall k \in \mathbb{Z},\ R_\theta^k = R_{k\theta}$

(v) $S_\theta^2 = I_2$

(vi) $S_\theta \times S_\phi = R_{\theta-\phi}$

(vii) $S_\theta \times R_\phi = S_{\theta-\phi}$

(viii) $R_\theta \times S_\phi = S_{\theta+\phi}$

**Remarque**

**R 17 –** À savoir retrouver dans la pratique.

## b Rotations du plan orienté

**Propriété 20 : Description des rotations en dimension 2**

*Soit $E$ euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathscr{SO}(E)$.*

Il existe un réel $\theta$ tel que la matrice dans TOUTE bond de $E$ de $r$ est $R_\theta$.

*On dit que $r$ est la **rotation vectorielle d'angle de mesure** $\theta$.*

**Propriété 21 : Structure**

*$(\mathscr{SO}(2), \times)$ est un groupe abélien.*

$\varphi : \begin{vmatrix} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathscr{SO}(2),\times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{vmatrix}$ *est un* morphisme de groupes surjectif.

$\psi : \begin{vmatrix} (\mathbb{U},\times) & \longrightarrow & (\mathscr{SO}(2),\times) \\ z & \longmapsto & R_\theta \text{ où } \theta \text{ est un argument de } z \end{vmatrix}$ *est un* isomorphisme de groupes.

**Remarque**

**R 18 –** La commutativité ne tient plus en dimension $> 2$.

**Propriété 22 : Unique rotation entre deux vecteurs unitaires**

*Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de $E$. Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ et $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.*

**Définition 7 : Angle orienté**

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de $E$ euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo $2\pi$.

**Propriété 23 : Expression du produit scalaire et du produit mixte**

*Soient $\vec{x}, \vec{y}$ des vecteurs non nuls de $E$ euclidien orienté de dimension 2.*

$$(\vec{x}|\vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) \qquad [\vec{x}, \vec{y}] = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$$

**Propriété 24 : Effet sur les angles orientés**

Les isométries directes (ie rotations) conservent les angles orientés.
——— indirectes changent le signe des ———.

### c Classifications des isométries du plan

**Propriété 25 : Isométries du plan**

*Soit $E$ euclidien orienté de dimension 2.*

- *Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans tout base orthonormale directe*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  *et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.*

- *Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est*

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

  *où $\theta$ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta}\overline{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.*

**Remarque**

**R 19 –** Le fait que les isométries indirectes sont exactement les réflexions est **très spécifique** à la dimension 2.

**R 20 –** Une rotation est la composée de deux réflexions d'axes distincts.

$$R_\theta = S_{\theta+\phi} \times S_\phi$$

**Méthode 2 : Étudier une isométrie en dim. 2...**

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont ortho**NORM**ées).

Elle est nécessairement de la forme $R_\theta$ ou $S_\theta$.

- Soit elle est de la forme $R_\theta$, c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation en lisant les cœfficients.
- Soit elle est de la forme $S_\theta$ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

## 2 Cas général

**Propriété 26 : Rappel**

*Si $u$ est une isométrie de $E$ et $F$ stable par $u$, alors $F^\perp$ l'est.*

**Lemme 1**

*Si $u$ est une isométrie de $E$, alors $u$ possède une droite ou un plan stable.*

**Lemme 2**

*Si $u$ est une isométrie de $E$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.*

**Remarque**

**R 21 –** L'inclusion peut être stricte.

**Théorème 2 : Réduction des isométries**

*Soit $E$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $E$, des entiers naturels $m, p, q$, des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{R_{\theta_1}} & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_m}} & & \\ & (0) & & \boxed{I_q} & \\ & & & & \boxed{-I_p} \end{pmatrix}$$

*où, pour tout réel $\theta$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.*

**Remarque**

**R 22 –** Avec ces notations, $u$ est une rotation si et seulement si $p$ est pair.

**R 23 –** En remarquant que $R_\pi = -I_2$, on voit qu'on peut supposer $p \in \{0, 1\}$.

et $R_0 = I_2$ ——— $q \in \{0,1\}$

**Théorème 3 : Version matricielle**

*Soit $M$ une matrice orthogonale ($M \in \mathcal{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice $Q$ de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^{T}$.*

## 3 Isométries en dimension 3

**Propriété 27 : Description des isométries en dimension 3**

*Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où $E$ est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Soit $u = r \in \mathcal{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \mathrm{id}_E$, et alors $\dim \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id}) = 1$ et $D = \mathrm{Ker}(r - \mathrm{id})$ est appelé* ***axe de la rotation****.*

*On fixe $a$ unitaire dirigeant $D$ et $(e_1, e_2)$ une base orthonormale de $P = D^{\perp}$.*

*$(e_1, e_2)$ est dite directe lorsque $(e_1, e_2, a)$ l'est. On dit que $D$* ***est dirigée et orientée par $a$****.*

*On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe $(e_1, e_2, a)$ adaptée à la décomposition $E = D^{\perp} \oplus D$, la matrice de $r$ est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*On dit que $\theta$* ***est une mesure de l'angle de la rotation $r$ (modulo $2\pi$)****.*

(ii) *(Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^{-}(E)$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ composée commutative d'une rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une réflexion de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).*

**Remarque**

**R 24 –** Et finalement, les isométries sont $\mathrm{id}_E$, les rotations, les anti-rotations dont les réflexions font partie, et $-\mathrm{id}_E$ (symétrie centrale).

**Propriété 28 : Caractéristiques d'une rotation en dimension 3**

*Soit $r$ est une rotation de $E$ espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de $\mathrm{id}_E$.*

- *Son axe est* l'ensemble des vecteurs invariants $E_1(r) = \mathrm{Ker}(r - id_E)$
- *Si $\theta$ est une mesure de son angle, alors*
  $$\mathrm{tr}(r) = 2\cos\theta + 1$$
- *Le signe de $\sin\theta$ est celui* de $[x, r(x), a]$ où $a$ dirige et oriente l'axe, $x \notin \mathrm{Vect}(a)$.

**Méthode 3 : Étude d'isométries en dim.3**

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariants, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\mathrm{id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$ : après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

`

**Exercice 6 : Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D : x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.**

**Exercice 7 : Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à** $M = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

# VI Endomorphismes autoadjoints

## 1 Définition

**Définition 8 : Endomorphisme autoadjoint**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est **autoadjoint** (ou **symétrique**) lorsque

$u^* = u$ ie $\forall x, y \in E, \ (u(x)|y) = (x|u(y))$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

**Exercice 8 : $\mathscr{S}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.**

**Remarque**

R 25 – Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie !

R 26 – La linéarité est en fait automatique (exercice).

$(u(x+\lambda x') - u(x) - \lambda u(x') | y) = \dots = 0$

**Exercice 9 : Montrer que si $u$ est autoadjoint, alors $\operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u = E$**

## 2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

**Propriété 29 : Matrice en bon d'un endomorphisme autoadjoint**

*Soit $\mathscr{B}$ une base* **orthonormale** *de l'espace euclidien $E$, $u \in \mathscr{L}(E)$.*
*$u$ est autoadjoint si et seulement si* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$

## 3 Cas des projections

**Propriété 30 : CNS pour qu'un projecteur soit orthogonal**

*Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$).*

Alors $p$ projection orthogonal $\iff p \in \mathscr{S}(E)$.

**Remarque**

R 27 – $P$ la matrice de $p$ en **base orthonormale**. Alors $p$ projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P$ et $P \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

## 4 Sous-espaces stables

**Propriété 31 : Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable**

Si $F$ stable par $u \in \mathscr{S}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi.

## 5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

$E$ désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

**Théorème 4 : spectral (version 1)**

*$u \in \mathscr{S}(E)$ si et seulement si $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de $u$.*

**Théorème 5 : spectral (version 2)**

*Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement s'il est diagonalisable en base orthonormale : $u \in \mathscr{S}(E)$ si et seulement s'il existe une base orthonormale de $E$ formée de vecteurs propres de $u$.*

**Théorème 6 : spectral (version 3)**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthodiagonalisable : il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$A = PDP^\top = PDP^{-1}.$$

**Remarque**

R 28 – $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de vecteurs propres de l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

$\chi_A = X^2 - 2iX - 1 = (X-i)^2$

$\mathrm{Sp}A = \{i\}$

**Remarque**

R 29 – C'est faux pour une matrice complexe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ symétrique complexe non diagonalisable.

$A \neq iI_2$

C'est vrai dans $\mathbb{C}$ pour des matrices telles que $A^\top = \overline{A}$ mais c'est hors-programme.

**Exercice 10 : CCINP 68**

## 6 Positivité, défini-positivité

**Définition 9 : Endomorphisme autoadjoint positif, défini-positif**

On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **positif** lorsque

$\forall x \in E, \quad (u(x) \mid x) \geqslant 0$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ de tels endomorphismes.
On dit que $u \in \mathcal{S}(E)$ est **défini positif** lorsque

$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (u(x) \mid x) > 0$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ de tels endomorphismes.

**Définition 10 : Matrice symétrique positive, défini-positive**

On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **positive** lorsque

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geqslant 0$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ de telles matrices.
On dit que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **défini-positive** lorsque

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad X^T A X > 0$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ de telles matrices.

**Remarque**

R 30 – Ce ne sont pas des espaces vectoriels, mais il y a stabilité par $+$.

R 31 – Les matrices symétriques positives (respectivement défini-positives) sont les matrices en **base orthonormale** de endomorphismes autoadjoints positifs (respectivement défini-positifs).

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

**Propriété 32 : Caractérisation spectrale**

$u \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$) $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}\,u \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\mathrm{Sp}A \subset \mathbb{R}^+$)

$u \in \mathcal{S}^{++}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}\,u \subset \mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathrm{Sp}A \subset \mathbb{R}_+^*$)

**Exercice 11 : CCINP 66**

**Exercice 12 : [Très Classique !] Racines carrées et décomposition polaire**

1. Racine carrée : Si $A$ est symétrique positive, montrer qu'il existe $B$ symétrique positive telle que $B^2 = A$.
   Que dire de $B$ si $A$ est supposée définie positive ?
   On montre l'unicité de $B$ géométriquement dans la question suivante.
2. Soit $u$ un endomorphisme autoadjoint positif.
   (a) Établir l'existence d'un endomorphisme $h$ symétrique positif tel que $h^2 = u$.
   (b) En utilisant le fait que, si $h^2 = u$, $h$ et $u$ commutent, démontrer l'unicité de $h$. Que peut-on dire de $h$ si $u$ est défini positif ?
3. Montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^\top M$.

4. **Décomposition polaire : Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\top A$ est une matrice symétrique définie positive puis qu'il existe un unique couple $(Q, S) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = QS$.**
5. **Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé.**
6. **Étendre le résultat d'existence de la décomposition polaire à toute matrice carrée réelle (mais sans unicité) en utilisant les résultats classiques de densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et de compacité de $\mathcal{O}(n)$.**

## 7 Annexe classique (HP) : formules variationnelles, norme subordonnée et rayon spectral

$E$ est un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

Les notions suivantes ne sont pas au programme mais se retrouvent très fréquemment dans des sujets d'écrit.

**Lemme 3 : Caractérisation de la norme**

*Pour tout* $x \in E$, $\|x\| = \max\limits_{\|y\|=1} (x|y) = \max\limits_{\|y\|\leqslant 1} (x|y)$.

**Propriété 33 : Norme subordonnée de l'adjoint**

*Pour tout* $u \in \mathcal{L}(E)$, $|||u||| = |||u^*|||$.

**Propriété 34 : Formules variationnelles**

*Soit* $u \in \mathcal{S}(E)$. *Alors* $x \mapsto \dfrac{(x|u(x))}{\|x\|^2}$ *atteint sur* $E \setminus \{0_E\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} u)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} u)$.

*Soit* $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. *Alors* $X \mapsto \dfrac{X^\top S X}{X^\top X}$ *atteint sur* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{(0)\}$ *un minimum et un maximum qui sont respectivement* $\min(\operatorname{Sp} S)$ *et* $\max(\operatorname{Sp} S)$.

**Définition 11 : Rayon spectral**

Le **rayon spectral** de $u \in \mathcal{L}(E)$ est $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} |\lambda|$.

**Propriété 35 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas autoadjoint positif**

*Si* $u \in \mathcal{S}^+(E)$, *alors* $\max(\operatorname{Sp} u) = \rho(u) = |||u|||$. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, $\rho(u) = |||u|||$.

**Propriété 36 : Norme subordonnée et rayon spectral, cas général**

*Si* $u \in \mathcal{L}(E)$, *alors* $|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$.