

Fonctions vectorielles

1 FONCTION VECTORIELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dans cette partie, on désigne par \mathbb{K} l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit I, J des intervalles de \mathbb{R} d'intérieurs non vides.

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés **de dimension finie** non réduits au vecteur nul. Lorsqu'il n'est question que d'un espace normé, sa norme est notée $\|\cdot\|$ sans ambiguïté.

Rappel : les normes étant équivalentes en dimension finie, les notions de limite ne dépendent pas de la norme.

1 Dérivabilité d'une fonction vectorielle

a Définition

Définition 1 : Dérivée

Soit $f: I \rightarrow E, a \in I$. On dit que f est **dérivable au point** a si et seulement si $\frac{1}{x-a}(f(x) - f(a))$ a une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ et appelée **dérivé de f au point a** .

f est dérivable sur I lorsqu'elle l'est en tout $a \in I$. Alors $f' = \frac{df}{dx} : \begin{cases} I & \rightarrow & E \\ x & \rightarrow & f'(x) \end{cases}$ est la **fonction dérivée** de f .

Propriété 1 : DL₁

f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a , c'est-à-dire si on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hb + h \cdot \varepsilon(h) = f(a) + hb + \underset{h \rightarrow 0}{o}(h)$$

où $b \in E$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0_E$. Dans ce cas, $b = f'(a)$.

même preuve que pour $E = \mathbb{K}$.

Corollaire 1 : dérivable \implies continue

Si f est dérivable en a (respectivement sur I), alors f est continue en a (respectivement sur I). La réciproque est fausse.

Remarque

R1 - Comme pour les fonctions numériques, on définit aussi des dérivées à gauche et à droite de a (lorsque c'est possible) notées $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$: ce sont les dérivées des restrictions à $I \cap]-\infty, a)$ et $I \cap [a, +\infty[$ de f , et on a f dérivable en a si et seulement si elle l'est à gauche et à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Propriété 2 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $E, f = \sum_{k=1}^n f_k e_k. \quad \mathcal{B}_k: I \rightarrow \mathbb{K}$

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) ssi pour tout k, f_k l'est et alors

$$f'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(a) e_k \quad (\text{respectivement } f' = \sum_{k=1}^n f'_k e_k).$$

b Opérations sur les fonctions dérivables

(prop. comme sur les limites)

Propriété 3 : Linéarité

Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable de dérivée la combinaison linéaire des dérivées.

(regarder coordonnées à coord.)

Propriété 4 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f: I \rightarrow E$ dérivable sur I , alors $u \circ f$ est dérivable, de dérivée

$$(u \circ f)' = u \circ f'$$

Remarque

R2 - \triangle ne pas confondre avec la formule de dérivée d'une composée !

Exemple

E1 - La projection du vecteur vitesse est le vecteur vitesse de la projection du mouvement.

**Propriété 5 : Image par une application multilinéaire**

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ dérivables sur I , on note $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$.

Alors $B(f, g)$ dérivable sur I et

$$[B(f, g)]' = B(f', g) + B(f, g')$$

Plus généralement, si $(f_1, \dots, f_n) \in \prod_{i=1}^n E_i^I$ est une famille de fonctions dérivables

sur I , $M : \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow F$ une application n -linéaire, alors $M(f_1, \dots, f_n)$ est dérivable sur I et

$$(M(f_1, \dots, f_n))' = \sum_{k=1}^n M(f_1, \dots, f_k', \dots, f_n)$$

Corollaire 2 : Dérivée d'un produit de fonction scalaire par une fonction vectorielle

Dérivée d'un produit de fonctions dérivables $f \cdot g$ où $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : I \rightarrow E$:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Corollaire 3 : Dérivée d'un produit scalaire

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien :

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g')$$

Corollaire 4 : Dérivée du déterminant

Dérivée d'un produit scalaire de fonctions dérivables dans un espace euclidien : Soit, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fonction dérivable. Alors l'application déterminant $f : t \mapsto \begin{vmatrix} C_1(t) & \dots & C_n(t) \end{vmatrix}$ est dérivable sur I et

$$f' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} C_1 & \dots & C_k' & \dots & C_n \end{vmatrix}$$

(det est n -linéaire ϕ aux colonnes.)

Propriété 6 : Composition

Si $f : I \rightarrow E$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables tel que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ dérivable et

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$$

C**Applications de classe \mathcal{C}^n** **Définition 2 : Classe d'une fonction vectorielle**

f est dite **de classe \mathcal{C}^0** sur I si elle est continue sur I .

f est dite **de classe \mathcal{C}^n** sur I si elle est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I .

f est dite **de classe \mathcal{C}^∞** si elle est de classe \mathcal{C}^n pour tout n , c'est-à-dire si elle est indéfiniment dérivable.

Remarque

R3 – On peut être dérivable sans être de classe \mathcal{C}^1 .

Exemple

E2 – $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par 0 en 0.

On fixe désormais $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Propriété 7 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$.

f est de classe \mathcal{C}^n sur I si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_k l'est et alors si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_k^{(n)} e_k$.

Propriété 8 : Linéarité

$\mathcal{C}^n(I, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et si $n \in \mathbb{N}$ et si $f, g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}.$$

Propriété 9 : Image par une application linéaire

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors $u \circ f \in \mathcal{C}^n(I, F)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$$

Exemple

E3 – La projection du vecteur accélération est le vecteur accélération de la projection du mouvement.

Propriété 10 : Formule de Leibniz

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$, $g \in \mathcal{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^n(I, G)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

par récurrence.

Corollaire 5 : Dérivées successives d'un produit

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors $f \cdot g \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et si $n \in \mathbb{N}$,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

$(\lambda, n) \mapsto \lambda \cdot n$ bilinéaire sur $\mathbb{K} \times E$

Propriété 11 : Composition

Si $f : I \rightarrow E$, $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^n telles que $\varphi(J) \subset I$, alors $f \circ \varphi$ de classe \mathcal{C}^n sur J .

(par récurrence).

2 Intégration sur un segment d'une fonction vectorielle

a Fonctions continues par morceaux

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition 3 : Fonctions continues par morceaux sur un segment

Une application $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite **continue par morceaux** si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0, a_1, \dots, a_n = b)$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite de } a_k \\ \text{et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f|_{]a_k, a_{k+1}[} \text{ est prolongeable} \\ \text{par continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est adaptée à f .

On note $\mathcal{C}_m([a, b], E)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Propriété 12 : Lien avec les fonctions coordonnées

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$. f est continue par morceaux ssi pour tout k , f_k l'est.

Corollaire 6 : Opérations

Si $f, g \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$, $\varphi \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, $f + \lambda g$ et $\varphi \cdot f$ sont continues par morceaux.

Remarque

R4 – $\mathcal{C}_m([a, b], E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 13 : CPM \Rightarrow bornée

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

**Définition 4 : Fonction CPM sur un intervalle**

Si I est un intervalle d'intérieur non vide, f est dite **continue par morceaux sur I** lorsqu'elle l'est sur tout segment inclus dans I .

b **Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux****Propriété 14 : Indépendance du choix de la base**

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$. Alors $\sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} .

Définition 5 : Intégrale sur un segment

Si $n = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , $f = \sum_{k=1}^n f_k e_k$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le vecteur $\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$.

On pose $\int_a^a f(t) dt = 0_E$ et $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$.

Remarque

R5 – Pas d'intégration sur un intervalle quelconque pour des fonctions vectorielles au programme.

Propriété 15 : Linéarité

$f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire de $\mathcal{C}_m([a, b], E)$.

Propriété 16 : Relation de Chasles

Si $f \in \mathcal{C}_m(I, E)$ et $a, b, c \in I$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

c **Sommes de Riemann**

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision et pour tout k entre 0 et $n-1$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$ alors on pose la somme de Riemann

$$R(f, \sigma, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(\xi_k).$$

Pour une fonction numérique, cela correspond à une somme d'aires de rectangles.

Si la subdivision est régulière, pour tout k , $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ et pour tout k , $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$. On obtient alors

$$S(f, \sigma, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k).$$

Et si on prend les rectangles à gauche, on a alors $\xi_k = a_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Dans ce cas,

$$S(f, \sigma, \xi) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Théorème 1 : Convergence des sommes de Riemann

Si $f \in \mathcal{C}_m([a, b], E)$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

alors $R_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$. En particulier : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} b\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 b(t) dt$

Théorème 2 : Inégalité triangulaire intégrale

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|.$$

(La valeur absolue sert à remettre les bornes dans le bon sens.)

d **Intégrale et primitive****Définition 6 : Primitive**

$g : I \rightarrow E$ est une **primitive** de $f : I \rightarrow E$ si g dérivable sur I et $g' = f$.

Propriété 17 : Caractérisation des fonctions constantes

$f : I \rightarrow E$ dérivable sur I est constante si et seulement si $f' \equiv 0_E$ sur I .

Remarque

R6 – La constante dépend de l'intervalle !

Propriété 18 : Comparaison de primitives

Soit $f : I \rightarrow E$, F, G deux primitives de f sur I , avec I **intervalle**. Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I, F(x) = G(x) + C$.

$(Cv + (F - G))' \equiv 0_E$

Théorème 3 : fondamental de l'analyse

Si f est continue sur un intervalle I à valeurs dans E et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Corollaire 7 : Applications du théorème fondamental

(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I , $a, b \in I$, $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

(iii) Si f est de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.

(iv) **Inégalité des accroissements finis :**

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\|f'\| \leq k$, alors f est k -lipschitzienne sur $[a, b]$.

Propriété 19 : Fonction intégrale dépendante de ses bornes

Soient I, J intervalles de \mathbb{R} , $u, v : I \rightarrow J$ dérivables, $f : J \rightarrow E$ continue.

L'application $\varphi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \varphi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

F primitive de $f, \varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x))$

e **Intégration par parties**

Propriété 20 : Intégration par parties

Si $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), v \in \mathcal{C}^1(I, E)$,

$$\forall a, b \in I, \int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

f **Changement de variable**

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Propriété 21 : Changement de variable

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1, f \in \mathcal{C}(I, E)$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) \cdot f(\varphi(u)) du.$$

3 **Formules de Taylor**

Définition 7 : Développement et reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a , son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d , pour tout $n \geq d+1, R_n \equiv 0$.
On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

Théorème 4 : Taylor reste intégrale

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I, E), a \in I$, alors pour tout $x \in I$,

$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) dt$



Remarque

R7 – À connaître **PARFAITEMENT**.
Pour s'en rappeler : tester pour $n = 0$ et plus de a sous l'intégrale.

Théorème 5 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \rightarrow E$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$\|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, x]} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

Remarque

R8 – Facile, plus de piège. Que retrouve-t-on pour $\eta = 0$? **IAF**

Ayant défini la négligeabilité, on peut, comme pour les fonctions numériques, calculer des développements limités vectoriels.

Propriété 22 : Primitivation de DL

Soit $f : I \rightarrow E$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = F(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

obtenue par primitivation terme à terme du DL de f .

Remarque

R9 – ⚠ Comme pour les fonctions numériques, on peut aussi dériver un DL terme à terme à condition de savoir que f' admet un DL.

Théorème 6 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \rightarrow E$, $a \in I$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^n sur I , alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

ie

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

⚠ La réciproque est fautive : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geq 2$.

Remarque

R10 – L'hypothèse du programme officiel est f de classe \mathcal{C}^n , mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a .

II

SÉRIES VECTORIELLES

Dans toute cette partie, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $(E, \|\cdot\|)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel normé non nul de dimension finie.

On pose $p = \dim E$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

1

Généralités

Définition 8 : Vocabulaire des séries vectorielles

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

Étudier la **série de terme général** u_n , notée $\sum u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \in E$.

S_n est appelée **somme partielle d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

$\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque $(S_n)_n$ converge, **divergente** sinon.

Lorsqu'elle est convergente, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Propriété 23 : Série télescopique vectorielle

Soit $(v_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. La suite (v_n) et la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ ont même nature et, si elles sont convergentes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0.$$

Propriété 24 : Espace vectoriel des termes généraux de séries vectorielles convergentes

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Propriété 25 : Convergences des séries coordonnées

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^p u_n^{(k)} e_k$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la série $\sum u_n^{(k)}$ converge.

Lorsque c'est le cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right) e_k.$$

Remarque

R 11 – Lorsqu'il y a convergence, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$.

Propriété 26 : Divergence grossière

Si $u_n \not\rightarrow 0_E$, alors $\sum u_n$ diverge. On parle de **divergence grossière**.

⚠ La réciproque est fautive !

Si $u_n \rightarrow 0_E$, **ON NE PEUT RIEN DIRE** sur la convergence de $\sum u_n$.

2 Reste d'une série convergente

Définition 9 : Reste d'une série vectorielle convergente

Soit $\sum u_n$ une série **convergente** et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On appelle **reste d'ordre n de la série** $\sum u_n$ le nombre $R_n = S - S_n$ qui n'a un sens que si la série converge.

Propriété 27 : Expression du reste

Avec les mêmes hypothèses, $\sum_{k=n+1}^N u_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\|R_n - S\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3 Convergence absolue

Définition 10 : Absolue convergente d'une série vectorielle

Une série $\sum u_n$ à valeur dans E est dite **absolument convergente** lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème 7 : En dimension finie, convergence absolue \Rightarrow convergence

Si E est **de dimension finie** et si $\sum u_n$ converge absolument (donc si $\sum \|u_n\|$ converge), alors $\sum u_n$ converge.

La réciproque est fautive.

Remarque

R 12 – Lorsqu'une série est convergente mais n'est pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

**Propriété 28 : Inégalité triangulaire vectorielle**

Si $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Remarque : Comparaison asymptotique pour les séries vectorielles

R 13 – On compare $\|u_n\|$ à une suite (v_n) à termes **réels positifs** (au moins à partir d'un certain rang), terme général d'une **série convergente**.

Dire que $u_n = o(v_n)$ ou que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, c'est dire que $\|u_n\| = o(v_n)$ ou que $\|u_n\| = \mathcal{O}(v_n)$.

Si $\|u_n\| = o(v_n)$ ou $\mathcal{O}(v_n)$ ou $\leq v_n$ apcr, ou $\sim v_n$ alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Pas de cas de divergence car il y a des séries semi-convergentes.

4 Sommation des relations comparaison

Si les sommations de relations de comparaison dans le programme officiel n'apparaissent que pour les séries numériques, elles s'étendent aisément au cas vectoriel en remplaçant dans les démonstrations les valeurs absolues par des normes.

Deux remarques :

- La série de référence est toujours à termes réels positifs.
- Rappel : pour les relations de comparaison vectorielles, il suffit de rajouter des normes de partout...

Théorème 8 : Sommation des relations comparaison dans le cas de divergence

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **diverge**.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $S_n = \mathcal{O}(\Sigma_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(\Sigma_n)$.

Remarque

R 14 – C'est encore valable si $v_n \geq 0$ seulement à partir d'un certain rang.

Théorème 9 : Sommation des relations comparaison dans le cas de convergence

Soient $u \in E^{\mathbb{N}}$, v une suite **réelle positive**. On suppose que $\sum v_n$ **converge**.

On note, sous réserve d'existence, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

(i) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \mathcal{O}(\rho_n)$.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = o(\rho_n)$.

Remarque

R 15 – C'est encore valable si $v_n \geq 0$ seulement à partir d'un certain rang.

**SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS VECTORIELLES**

$(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés de dimension finie. A est une partie non vide de E .

Pour faire simple, les normes vont remplacer les modules et les boules vont remplacer les intervalles ouverts.

Les compacts vont remplacer les segments.

1 Suites de fonctions**Définition 11 : Convergence simple**

Soit $f : A \rightarrow F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A .

On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement sur A vers f** lorsque pour tout $x \in A$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. C'est-à-dire

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_{x,\varepsilon}, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 12 : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_n$ **converge uniformément sur I vers f** lorsqu'on peut choisir le $N_{x,\varepsilon}$ de la définition précédente indépendant de x . Autrement dit lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Propriété 29 : de la convergence uniforme

- La convergence uniforme implique la convergence simple.
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A et $N_\infty(f_n - f) = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \rightarrow 0$.

Remarque

R 16 – Il y a convergence uniforme au voisinage de $x_0 \in \bar{A}$ lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel qu'il y ait convergence uniforme sur $A \cap B(x_0, \eta)$.

Théorème 10 : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $f : A \rightarrow F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A , $x_0 \in I$. On suppose que

- H1** Pour tout n , f_n est continue en x_0 (respectivement sur A).
- H2** La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de x_0 (respectivement au voisinage de chaque point de A).

Alors

- C1** f est continue en x_0 (respectivement sur A).

Théorème 11 : de la double limite

Soit $f : A \rightarrow F$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A , $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{A}$. On suppose que

- H1** $(f_n)_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .
- H2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors on a $b \in F$ tel que

- C1** $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$
- C2** $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

Autrement dit, les limites existant bien :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Pour les intégrations et dérivations, la variable est réelle.

Théorème 12 : Interversion limite intégrale par CU sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

- H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$
 - H2** La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$
- alors

- C1** f est continue sur $[a, b]$

C2 $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Autrement dit, les limites existant bien, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$.

Théorème 13 : Convergence uniforme de primitive de fonction vectorielle

Soient $f : I \rightarrow F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I , $a \in I$. On suppose que

- H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .
- H2** La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- C1** f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,
- C2** $(G_n)_n$ converge uniformément vers G sur tout segment de I .

Théorème 14 : Dérivation d'une suite de fonctions vectorielles

Soient $f : I \rightarrow F$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I . On suppose que

- H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- H2** La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I .
- H3** La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h .

Alors

- C1** f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- C2** $f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.
- C3** $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

**Théorème 15 : Généralisation à la classe \mathcal{C}^p**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- H1** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^p sur I .
- H2** Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I .
- H3** La suite $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p .

Alors

- C1** $f = h_0$ est de classe \mathcal{C}^p sur I .
- C2** Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.
- C3** Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I .

2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F^A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Définition 13 : Convergences de série de fonctions vectorielles

On dit que la série de fonction $\sum f_n$

- **converge simplement** sur A si, pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- **converge uniformément** sur A si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A .
- **converge uniformément au voisinage de** $a \in \bar{A}$ s'il existe $r > 0$ tel que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A \cap B(a, r)$.
- **converge normalement** sur A si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et si la série $\sum N_\infty(f_n)$ converge, avec $N_\infty(f) = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_F$.

Théorème 16 : Continuité d'une série de fonctions vectorielles

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A , $a \in A$. On suppose que

- H1** Pour tout n , f_n est continue en a (respectivement sur A).
- H2** La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément au voisinage de a (respectivement de chaque point de A).

Alors

- C1** $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a (respectivement sur A).

Corollaire 8 : Continuité d'une série entière complexe

La somme d'une série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R est continue sur le disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Il y a CN sur tout disque fermé $\subset D(0, R)$

Remarque

- R17** – Il peut y avoir des discontinuités sur le cercle.
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout sur le cercle.

Exemple

E4 – La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{C} .

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = +\infty$$

Théorème 17 : de la double limite

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions appartenant à F^A , $(b_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ et $a \in \bar{A}$ (éventuellement infini si $E = \mathbb{R}$). On suppose que

- H1** $\sum f_n$ converge uniformément vers f au voisinage de a .
- H2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_n$.

Alors

- C1** $\sum b_n$ converge.
- C2** $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Autrement dit, les limites existant bien : $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$.

Désormais, les fonctions sont considérées de I intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide vers l'espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|_E)$.

Théorème 18 : Intégration terme à terme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $F^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

C2 $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Théorème 19 : Série de primitives

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I , $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I .

Alors on pose $G_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 La série de fonctions $\sum G_n$ converge uniformément sur tout segment de I et

$$G = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n.$$

Théorème 20 : Classe \mathcal{C}^p d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^p sur I .

H2 Les séries de fonctions $\sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}$ convergent simplement sur I .

H3 La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^p sur I .

C2 Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$ et la convergence est uniforme sur tout segment de I .

Théorème 21 : Classe \mathcal{C}^∞ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de F^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

*(après
suffisant)*



IV

EXPONENTIELLES DE MATRICES ET D'ENDOMORPHISMES

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul.

1 Définition

Définition 14 : Norme d'algèbre

Une norme N sur une \mathbb{K} -algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est dite **sous-multiplicative** si pour tout $(a, b) \in \mathcal{A}^2$, $N(ab) \leq N(a)N(b)$. On parle aussi de **norme d'algèbre**.

Remarque

R 18 – Toute norme subordonnée convient sur $\mathcal{L}(E)$ et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a aussi que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 30 : Norme d'algèbre et puissance

On a alors, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$N(a^k) \leq N(a)^k.$$

(Récurrence)

Corollaire 9 : Convergence de séries vectorielles exponentielles et géométriques

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre munie de N norme d'algèbre, et $a \in \mathcal{A}$.

(i) La série $\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente.

(ii) Si $N(a) < 1$, alors la série $\sum_{k \geq 0} a^k$ est absolument convergente.

Si $1_{\mathcal{A}}$ est l'unité de \mathcal{A} , et \mathcal{A} de dimension finie, on a alors $1_{\mathcal{A}} - a$ inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} a^k$.

Remarque

R 19 – Il faut être en dimension finie pour en déduire la convergence de ces séries.

Exercice 1 : CCINP 40

Corollaire 10 : Cas des endomorphismes et des matrices carrées

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente.

Définition 15 : Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\exp u = e^u = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$. (E est de df)

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\exp A = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

2 Propriétés

Propriété 31 : Lien entre les exponentielles d'endomorphisme et de matrice

Si A matrice représentant $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exp A$ représente $\exp u$ dans la même base.

Remarque

R 20 – Ainsi, via l'isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propriétés de \exp pour les matrices ou les endomorphismes sont semblables.

Propriété 32 : de l'exponentielle

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

(i) Si $u \circ v = v \circ u$,

(ii) Si $u \circ v = v \circ u$,

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(t \text{id}_E) =$

(iv) $\exp(0_{\mathcal{L}(E)}) =$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si $AB = BA$,

(ii) Si $AB = BA$,

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\exp(tI_n) =$

(iv) $\exp(0_n) =$

Propriété 33 : Continuité de l'exponentielle

Les applications $\exp : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto \exp u \end{cases}$ et $\exp : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A \mapsto \exp A \end{cases}$ sont continues.

Propriété 34 : Dérivation

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les applications $\phi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto \exp(tu) \end{cases}$ et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \exp(tA) \end{cases}$ sont dérivables sur \mathbb{R} , et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

Propriété 35 : Exponentielle d'une somme

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$,

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA$,

Corollaire 11 : Inversibilité et inverse de l'exponentielle

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

**Propriété 36 : Exponentielles de matrices diagonales, triangulaires, nilpotentes**

$$\blacksquare \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$\blacksquare \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

- Si N est nilpotente d'indice p ,

$$\exp N =$$

Propriété 37 : Exponentielle et réduction

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\exp(P^{-1}AP) =$$

- $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) =$

Remarque

$$\mathbf{R21} - \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\exp(A)) =$$

Exemple

E5 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut déterminer $\exp A$ soit en diagonalisant, soit en cherchant le polynôme annulateur pour trouver les puissances de A .

E6 – Exponentielle de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Méthode 1 : Avec une matrice nilpotente**

Plus généralement, si on a N nilpotente et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n + N$, le calcul de $\exp A$ est facile.

C'est le cas lorsque A a une unique valeur propre λ , alors $\chi_A = (X - \lambda)^n$ est un polynôme annulateur par Cayley-Hamilton, donc $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.

Plus généralement, un résultat du programme montre que dans une base adaptée (supplémentarité des sous-espaces caractéristiques), on a une matrice diagonale par

blocs $\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ où pour tout i , $A_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.

On vérifie facilement que l'exponentielle de cette matrice est $\begin{pmatrix} \exp A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \exp A_p \end{pmatrix}$.