

## Savoir-faire et thèmes classiques – Topologie [II]

### Savoir-faire

- Montrer qu'une partie est un ouvert ou un fermé relatif à l'ensemble de départ comme image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue
- Montrer qu'une application linéaire est continue
- Déterminer la norme subordonnée d'un endomorphisme ou d'une matrice
- Utiliser le caractère fermé d'un sous-espace vectoriel de dimension finie
- Définition de Bolzano-Weierstrß des compacts, caractérisation en dimension finie
- Montrer qu'une partie est compacte comme partie fermée d'un compact, comme produit de compact, comme image (directe) continue d'un compact
- Caractériser les suites convergentes dans un compact par l'unicité de la valeur d'adhérence
- Définir les composantes connexes par arcs
- Utiliser le fait qu'une partie convexe ou étoilée est connexe par arcs
- Caractériser les intervalles de  $\mathbb{R}$  comme parties convexes ou comme parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$
- Reconnaître un connexe par arcs comme image (directe) continue d'un connexe par arcs

### Thèmes Classiques

- Normes matricielles subordonnées aux normes usuelles sur  $\mathbb{R}^n$
- Topologie matricielle : continuité de  $\det, \text{Com}$ ;  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{O}(n)$  est compact, les matrices diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont denses dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (non valable dans  $\mathbb{R}$ ), connexité par arc ou non de  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{O}(n)$ , de l'ensemble des matrices diagonalisables,  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ , si des matrices réelles sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , elles le sont dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- (\*) Propriété de Borel-Lebesgue
- Diamètre d'une partie bornée, d'un compact
- Théorème du point fixe pour une fonction contractante ou lorsque, sur un compact,
 
$$x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
- Distance à un compact, à un fermé