# 20

## Savoir-faire et thèmes classiques – Réduction

### Savoir-faire

- ☐ Définir un sous-espace stable par un endomorphisme, le caractériser par des bases, l'interpréter sur une matrice par blocs dans une base adaptée, savoir que les droites stables sont les droites engendrées par les vecteurs propres
- ☐ Savoir que l'image, le noyau, les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont stables par un endomorphisme avec lequel il commute
- ☐ Définir les éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice, savoir que des sous-espaces propres sont toujours en somme directe
- ☐ Calculer un polynôme caractéristique, en connaître quelques cœfficients, interpréter le déterminant et la trace lorsqu'il est scindé
- ☐ Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton
- ☐ Connaître parfaitement les (nombreuses) caractérisations et conditions nécessaires de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité
- ☐ Connaître les particularités lorsque la matrice est réelle et qu'on la réduit dans $\mathbb{C}$
- ☐ Connaître les propriétés de réduction et des polynômes caractéristique et minimal d'un endomorphisme induit
- ☐ Diagonaliser effectivement une matrice, déterminer une base de sous-espace propre par lecture matricielle ou par résolution de système linéaire
- ☐ Appliquer une diagonalisation à la recherche du terme général de système de suites récurrentes d'ordre $1$ ou à une vectorialisation de suite récurrente d'ordre supérieur, à résoudre un système différentiel, à déterminer le commutant d'une matrice, à extraire les racines carrées d'une matrice et, plus généralement, résoudre des équations matricielles
- ☐ Déterminer les sous-espaces stables par une matrice diagonalisable
- ☐ Trigonaliser effectivement des petites matrices
- ☐ Manipuler des polynômes en un endomorphisme ou une matrice carrée, en particulier pour des matrices diagonales ou triangulaires
- ☐ Connaître le lien entre polynôme annulateur et valeurs propres
- ☐ Utiliser le lemme de décomposition des noyaux, par exemple appliqué à la résolution d'équations différentielles
- ☐ Définir le polynôme minimal, déduire de son degré une base de l'algèbre des polynôme en l'endomorphisme ou en la matrice
- ☐ Calculer effectivement le polynôme minimal, en utilisant par exemple le fait qu'il divise la polynôme caractéristique et a les mêmes racines
- ☐ Définir et caractériser les endomorphismes et matrices nilpotentes
- ☐ Connaître la définition et les propriétés des sous-espaces caractéristiques, les appliquer pour obtenir une réduction par bloc type Dunford

### Thèmes Classiques

- ☐ Réduction des matrices compagnes
- ☐ Diagonalisation et trigonalisation simultanées
- ☐ Réduction et déterminant de matrice circulante
- ☐ Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
- ☐ Réduction des matrices de rang $1$
- ☐ Théorème de Gerschgörin de localisation des valeurs propres
- ☐ Réduction par blocs
- ☐ Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent dans une base adaptée, détermination de commutant et des sous-espaces stables lorsque l'indice de nilpotence est la dimension de l'espace
- ☐ Existence et $(*)$ unicité de la décomposition de Dunford
- ☐ $(*)$ Endomorphismes semi-simples
- ☐ $(*)$ Endomorphismes cycliques
- ☐ $(*)$ Endomorphismes simples