20

Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition 1 : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité :

$\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

Homogénéité :

$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) :

$\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

On dit alors que le couple (E,N) est un **espace vectoriel normé**.

Remarque

R1 – Souvent notée $\|\cdot\|$ également.

R2 – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

R3 – La positivité est en fait automatique ! Par homogénéité et inégalité triangulaire, si $x \in E$,

$$2N(x) = N(x) + N(-x) \geqslant N(x-x) = N(0_E) = |0|\, N(0_E) = 0$$

Exemple

E1 – Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

$\alpha |\cdot|$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Propriété 1 : d'une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(*i*) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

(*ii*) $\|-x\| = \|x\|$

(*iii*) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition 2 : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

$\frac{1}{\|x\|}x$ $\quad x$

Remarque

R4 – Si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|}x$ est le vecteur normé associé à x (de même direction et de même sens.)

Définition 3 : Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d} : \left|\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}\right.$$

Propriété 2 : d'une distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(*i*) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \iff x = y$.

(*ii*) ***Symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$.

(*iii*) ***Double inégalité triangulaire*** : $\forall x, y, z \in E$

$|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Remarque

R5 – Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble E : c'est une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique, telle que $\mathrm{d}(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$ et vérifiant l'inégalité triangulaire $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$. On dit alors que (E,d) est un **espace métrique**.
C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

Définition 4 : distance à une partie

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$.
On appelle **distance de x à A** le réel

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$$

Propriété 3 : 1-lipschitzianité de la distance à une partie

$$\begin{vmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{vmatrix}$$ *est 1-lipschitzienne sur E dans le sens où*

$$\forall x, x' \in E, \quad |d(x,A) - d(x',A)| \leq \|x - x'\|$$

C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 5 : Norme euclidienne

Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

L'application $\|\cdot\|$ est appelée **norme euclidienne** sur E associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Propriété 4 : Toute norme euclidienne est une norme

La norme euclidienne associée à un produit scalaire est une norme sur E.

cf chapitre précédent. IT = inégalité de Minkowski avec cas d'égalité = positivement lié découle du CS.

3 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition 6 : Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

On définit, pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Remarque

R6 – On rappelle que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|(x|y)| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$ soit encore

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si (x,y) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 5 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque

R 7 – On peut montrer que plus généralement, si $p \geqslant 1$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et même que $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$ (cf TD) d'où la notation.

R 8 – Plus généralement, sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on décompose un vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

et

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$$

qui définissent des normes sur E.

Exemple

E 2 – Sur $\mathbb{K}_n[X]$, en posant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

E 3 – Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K}) = L^\infty(X,\mathbb{K})$

Propriété 6 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, encore noté $L^\infty(X,\mathbb{K})$ (notations hors-programme) des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

R 9 – C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre.

Définition 7 : Norme infini

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Remarque

R 10 – Bien défini que $\operatorname{Im} f = \{|f(x)|,\ x \in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

car f bornée

Propriété 7 : Rappel

Si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

Propriété 8 : La norme infini en est une

N_∞ est une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Définition 8 : Normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,dt \quad (= \|f\|_1)$$

$$N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2}$$

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Remarque

R 11 – Pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on a même $N_\infty(f) = \max_{[a,b]} |f|$.

R 12 – On rappelle que N_2 sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ est la norme associée au produit scalaire canonique

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$|(f|g)| \leqslant N_2(f)N_2(g)$$

soit encore

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

avec égalité si et seulement si (f,g) liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans notre programme.

Propriété 9 : Ce sont des normes

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

4 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition 9 : Boule et sphères

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r :

$B(a,r) = \{x \in E,\ d(x,a) = \|x-a\| < r\}$

Boule fermée de centre a et de rayon r :

$\bar{B}(a,r) = B'(a,r) = B_f(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$

Sphère de centre a et de rayon r :

$S(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.

Exemple

E 4 – Cas où $r = 0$.

E 5 – Cas de $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

E 6 – Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.

Définition 10 : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x,y \in E$ A et pour tout $t \in [0,1]$,

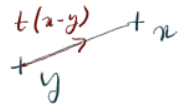
$tx + (1-t)y \in A$

ie $[x,y] = \{tx+(1-t)y,\ t \in [0,1]\} \subset A$

Remarque

R 13 – $\{tx+(1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ représente le segment formé par les extrémités des vecteurs x et y.

$tx + (1-t)y = y + t(x-y)$



Propriété 10 : Convexité des boules

Les boules sont convexes.

5 Parties, suites et fonctions bornées

Définition 11 : Partie bornée

$A \in \mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall a \in A,\ \|a\| \leqslant M$ ie $A \subset \bar{B}(0_E, M)$

Propriété 11 : Les boules sont bornées

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Remarque

R 14 – Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

Définition 12 : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f \in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$ (ie si $f(X)$ est une partie bornée de E.)

On note $L^\infty(X,E) = \mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées (notations hors-programme).

Propriété 12 : Norme infini

On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ bien défini.

Alors $(\mathscr{B}(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

m̂ preuve que dans $\mathbb{K}$ en remplaçant les $|.|$ par des $\|.\|$.

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$:

Définition 13 : Suite bornée

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)

On note $\ell^\infty(E) = \mathscr{B}(\mathbb{N},E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E (notation hors-programme).

Remarque

R 15 – On peut aussi définir une norme infini sur l'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$$

6 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété 13

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On pose, pour $x = (x_1,\dots,x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,

$$N(x) = \max\left(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p)\right)$$

*Alors N est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ appelée **norme produit**.*

Remarque

R 16 – En prenant $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$, la norme produit sur $\mathbb{K}^n$ est $\|\cdot\|_\infty$

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition 14 : Suite convergente, divergente

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$$

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.

Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Remarque

R 17 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0. $\big|\|u_n - \ell\| - 0\big| = \|u_n - \ell\|$

R 18 – $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in \overline{B}(\ell, \varepsilon)$$

R 19 – La convergence dépend a priori de la norme.

Définition 15 : Modes de convergences d'une suite de fonctions

Si $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en** moyenne .
Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en** moyenne quadratique .
Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence** uniforme (convergence graphique).

Propriété 14 : Unicité de la limite

Soit $u \in \cancel{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ E, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.

Propriété 15 : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée.

Propriété 16 : Convergence de la norme des termes

Soit $u \in \cancel{\mathbb{E}}^{\mathbb{N}}$ E, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété 17 : Convergence par majoration

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Définition 16 : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u.

Propriété 18 : Cas des suites convergentes

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

Remarque

R 20 – Réciproque fausse en général. On verra bien un contexte dans lequel elle est vrai (spoiler : il suffit qu'elle soit à valeur dans un compact.)

Corollaire 1 : Contraposée

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété 19 : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété 20 : Produit externe de suites convergentes

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété 21 : Convergence de suite dans un produit d'evn

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \cdots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in (E_1 \times \cdots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. Alors

$$u \xrightarrow{N} \ell \text{ si et seulement si } \forall i \in [\![1,p]\!],\ u^{(i)} \xrightarrow{N_i} \ell_i$$

III COMPARAISON DE NORMES

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_1(a,r)$ (respectivement $B_2(a,r)$) une boule ouverte pour N_1 (respectivement N_2).

1 Domination

Définition 17 : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsque
on a $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leq \alpha N_2$

Remarque

R 21 – Traduction avec les boules : $B_2(a,r) \subset B_1(a,\alpha r)$

R 22 – Si une partie ou une fonction ou une suite est bornée pour N_2, elle l'est automatiquement pour N_1 aussi.

Propriété 22 : Implication de convergences

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
$u \xrightarrow{N_2} \ell \Rightarrow u \xrightarrow{N_1} \ell$

Remarque

R 23 – Si N_1 n'est pas dominée par N_2, on fabrique une suite qui tend vers 0 pour N_2 et diverge pour N_1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in E$ tel que $N_1(x_n) > nN_2(x_n)$. Il suffit alors de poser $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}N_2(x_n)} x_n$

négation de la déf avec $\alpha = n$

Méthode 1 : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que
- $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$
- ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$
- ou encore tel que $\frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} \longrightarrow +\infty$. (contient les 2 1ers cas)

2 Équivalence

a Définition

Définition 18 : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement si on $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que
$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$

Remarque

R 24 – C'est une relation d'équivalence.

Propriété 23 : Équivalence de convergence

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{K}^n$

Propriété 24 : Équivalence des normes

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{K}^n$.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Propriété 25 : Domination des normes

Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

- N_1 dominée par N_∞ $(N_1 \leq (b-a)N_\infty)$
- N_2 dominée par N_∞ $(N_2 \leq \sqrt{b-a}\,N_\infty)$
- N_1 dominée par N_2 $(N_1 \leq \sqrt{b-a}\,N_2)$

réciproques fausses.

d Cas de la dimension finie

Théorème 1 : Équivalence des normes en dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Démonstration

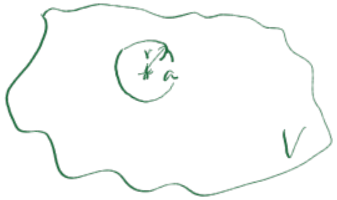
Non exigible, admis provisoirement. ■

Propriété 26 : Convergence coordonnée à coordonnée

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV Topologie des espaces vectoriels normés

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.



1 Voisinages, ouverts, fermés

a Voisinage

Définition 19 : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.
On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$

ie $\forall x \in E, \|x - a\| < r \Rightarrow x \in V$

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, V voisinage de $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists r > 0,]a-r, a+r[\subset V$

Remarque

R 25 – Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de a qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans V.
En particulier, $a \in V$.

Propriété 27 : des voisinages

(i) *Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors* W voisinage de a.

(ii) *Une réunion* quelconque (non vide) de voisinages de a en est un.

(iii) *Une intersection* finie de voisinages de a en est un.

Remarque

R 26 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ voisinage de 0

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} V_i = \{0\}$$

① V
② $\forall i \geqslant 1, -\frac{1}{i} < x < \frac{1}{i} \Rightarrow x = 0$ avec $i \to +\infty$

n'est pas un voisinage de 0.

Propriété 28 : Voisinages et domination de norme

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 *sont des voisinages pour* N_2.

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

b Parties ouvertes

Définition 20 : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque

$\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points

ie $\forall x \in \mathcal{O}, \exists r>0, B(x,r) \subset \mathcal{O}$

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Remarque

R 27 – Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».

Exemple

E 7 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des ouverts de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 8 – Le quart de plan $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>0 \text{ et } y>0\}$ est-il un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?

E 9 – Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a<b$, alors $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriété 29 : Cas des boules ouvertes

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété 30 : des ouverts

(i) *$\varnothing$, E sont ouverts.*

(ii) *Une réunion* quelconque d'ouverts est ouverte.

(iii) *Une intersection* finie d'ouverts est ouverte.

(iv) *Un produit **fini** d'ouverts est ouvert (pour la norme produit).*

Remarque

R 28 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.

Dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ ouvert de $\mathbb{R}$

$\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ n'est pas ouvert.

car n'est pas un voisinage de 0.

$(\forall r>0, \quad B(0,r) =]-r,r[\not\subset \{0\}.)$

Propriété 31 : Ouverts et domination de normes

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 *sont des ouverts pour* N_2.

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

Remarque

R 29 – On appelle topologie de $(E, \|\cdot\|)$ l'ensemble de ses ouverts.
Si N_1 est dominée par N_2, la topologie pour N_2 possède plus d'ouverts que celle pour N_1. On dit que la topologie pour N_2 est **plus fine** que celle pour N_1.

R 30 – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendant pas du choix de la norme. Ce sera aussi le cas de toutes les notions définies ci-après : fermé, adhérence, intérieur, densité.

Exercice 1 : CCINP 37

C Parties fermées

Définition 21 : Fermé

Une partie F de E est dite **fermée** lorsque son complémentaire dans E est ouvert.

Remarque

R 31 – Intuitivement : bord compris.

R 32 – ⚠ Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

Propriété 32 : Cas des boules fermées

Toute boule fermée est fermée (!)

Remarque

R 33 – Les singletons sont des fermés. (Boule fermée avec $r=0$)

Propriété 33 : des fermés

(i) *$\varnothing$, E sont fermés.* (et ouverts, donc.)

(ii) *Une intersection* quelconque de fermés est fermée

(iii) *Une réunion* finie de fermés est fermée.

(iv) *Un produit **fini** de fermés est fermé (pour la norme produit).*

Remarque

R 34 – C'était l'inverse pour les ouverts.

R 35 – ⚠ Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.

Dans $\mathbb{R}$, les $F_i = \left[-1+\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}\right]$ fermé de $\mathbb{R}$ cf $\in \mathbb{N}$

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i =]-1,1[$ n'est pas fermé car $]-1,1[^C =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ n'est pas ouvert (pas v. de -1 et 1)

R 36 – Une partie finie est fermée.
réunion finie de singletons (boules fermées de rayon 0).

Exemple

E 10 – Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$?

E 11 – Si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, alors $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a,b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Propriété 34 : Cas des sphères

Toute sphère de E est fermée.

Propriété 35 : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Exemple

E 12 – $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \leqslant y \leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Remarque

R 37 – Intuitivement, un point adhérent est un point dans A ou « au bord » de A.

Définition 22 : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque

$\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \|x - a\| < \varepsilon$.

Propriété 36 : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement si il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x$.

Définition 23 : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque

R 38 – Attention à la notation : ne pas confondre avec le complémentaire.

R 39 – Intuitivement, « les points de A et les points des bords ».

Exemple

E 13 –

E	A	$\overline{A}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$]0,1]$	$[0,1]$
E	$B(a,r)$	$\overline{B}(a,r)$

Propriété 37 : Croissance

Si $A \subset B$, $\quad \overline{A} \subset \overline{B}$.

Propriété 38 : Caractérisation

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

au sens de l'inclusion.

Propriété 39 : Caractérisation des fermés

A est fermée ssi $A = \overline{A}$

Propriété 40 : Cas des sous-espaces et des convexes (HP)

Si F sev de E, $\overline{F}$ sev de E.

Si C convexe de E, $\overline{C}$ convexe de E.

Exercice 2 : CCINP 34

Exercice 3 : CCINP 44

Exercice 4 : CCINP 45

b Densité

Définition 24 : Densité

D est **dense** dans E lorsque

$\overline{D} = E$ ie $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

Dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D \neq \emptyset$

Propriété 41 : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si

tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de D.

Exemple

E 14 – $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{D}} = \mathbb{R}$

E 15 – Quels théorèmes déjà rencontrés sont des résultats de densité ?

c Intérieur

Définition 25 : Point intérieur et intérieur d'une partie

Soit A une partie de E, $x \in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque

il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$

ie A est un voisinage x.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété 42 : Croissance

$A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$

Propriété 43 : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Propriété 44 : Caractérisation des ouverts

$\mathcal{O}$ ouvert $\iff \mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

Exemple

E 16 – $\mathring{\mathbb{Q}} =$

E 17 – $\overline{\mathring{B}(a, r)} =$

d Frontière

Définition 26 : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}.$$

« le bord de A ».

Exemple

E 18 – $\mathrm{Fr}(B(a,r)) =$

E 19 – $\mathrm{Fr}([0,1[) =$

E 20 – $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) =$

Propriété 45 : Caractère fermé

Une frontière est toujours fermée.

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

a Voisinage relatif

Définition 27 : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de** a **dans** A toute partie V' de A s'écrivant

$V' = V \cap A$ où V voisinage de a (dans E).

ie $\exists r>0,\ B(a,r) \cap A \subset V'$.

Remarque

R 40 – V' n'est pas nécessairement un voisinage de a dans E.
Par exemple $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de 0 dans $[0,1[$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

b Ouverts relatifs

Définition 28 : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de** A (ou **pour la topologie induite sur** A) lorsqu' elle est un voisinage relatif de chacun de ses points.

Remarque

R 41 – $\mathcal{O}'$ ouvert relatif de A si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{O}'$,

$$\exists r>0,\ B(x,r) \cap A \subset \mathcal{O}'$$

Propriété 46 : Caractérisation

$\mathcal{O}'$ de A est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe $\mathcal{O}$ ouvert tel (partie) que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

Exemple

E 21 – $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de $[0,1]$. ie ouvert relatif

$$\left[0, \tfrac{1}{2}\right[= \underbrace{\left]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right[}_{\text{ouvert (de } \mathbb{R})} \cap [0,1]$$

Remarque

R 42 – Si A est ouvert, les ouverts relatifs de A sont les ouverts (de E) inclus dans A

$\underbrace{O}_{\text{ouvert qcq}} \cap \underbrace{A}_{\text{ouvert}}$ ouvert inclus dans A

c Fermés relatifs

Définition 29 : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de** A si son complémentaire dans A est un ouvert (relatif) de A.

Propriété 47 : Caractérisation

F' est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé tel que

$$F' = F \cap A$$

Passer au compl. dans A dans la caractérisation des ouverts de A.

Remarque

R 43 – Si A est fermé, les fermés relatifs de A sont les fermés. inclus dans A.

Propriété 48 : Caractérisation séquentielle

~~*Soit F' une partie de A.*~~

F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant dans A a sa limite dans F'.

d Densité

Définition 30 : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si

$$A \subset \overline{B}$$

ie $\overline{B} \cap A = A$

ie Tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.

$$C_A B = A \setminus B = A \cap B^c$$