TD ✻ Probabilités

1 X-ENS : exemple de tribus

Soit I une partie non vide de $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'entiers naturels indexées par I. Pour X partie de $\mathbb{N}^{(I)}$, on note

$$A_I(X) = \left\{a \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N})},\ \exists x \in X,\ \forall i \in I,\ a_i = x_i\right\}$$

et $\mathscr{A}_I = \left\{A_I(X),\ X \in \mathscr{P}\left(\mathbb{N}^{(I)}\right)\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{A}_I$ est une tribu sur $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$.
2. Étant donné deux parties I et J de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathscr{A}_{I\cap J} = \mathscr{A}_I \cap \mathscr{A}_J$,
3. Étant donné deux parties I et J de $\mathbb{N}$, montrer que $\mathscr{A}_{I\cup J}$ est la tribu engendrée par $\mathscr{A}_I \cup \mathscr{A}_J$.

2 Non dénombrabilité de l'univers

Existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ dénombrable sur lequel soit définie une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$?

3 Écart à l'indépendance

Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}.$$

On pourra utiliser des fonctions indicatrices.

4 Pile ou Face : longueur des premières séquences

On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPPFFFF\ldots \qquad FFFPFPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.
3. Montrer que $\mathbb{E}(L_1) \geqslant \mathbb{E}(L_2)$ et $\mathbb{V}(L_1) \geqslant \mathbb{V}(L_2)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.
5. Calculer la limite lorsque $m \to +\infty$ de $\mathbb{P}(L_2 = n \mid L_1 = m)$

5 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

1. Montrer que F_X est croissante et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(t) \xrightarrow[t\to x^+]{} \mathbb{P}(X \leqslant x)$ et $F_X(t) \xrightarrow[t\to x^-]{} \mathbb{P}(X < x)$.
   Traduction en terme de continuité ?
3. En déduire que deux variables aléatoires réelles ont même loi si et seulement si leurs fonctions de répartition sont égales.

6 Très classique : Identité de Wald

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi et d'espérance finie à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'espérance finie tel que N et toutes les X_n soient indépendantes.

1. On suppose dans cette question que les X_n suivent une loi $\mathscr{B}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ et que N suit une loi $\mathscr{P}(\theta)$ de paramètre $\theta > 0$.
   Rappeler les fonctions génératrices, pour $n \in \mathbb{N}$, de X_n, $\sum_{\ell=1}^{n} X_\ell$ et N puis déterminer la loi de $Y = \sum_{\ell=1}^{N} X_\ell$ (on admet qu'elle définit bien une variable aléatoire discrète.)
2. Dans cette question, on suppose que les X_n suivent une même loi quelconque, et que N suit une loi quelconque, toujours toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.
   Montrer l'identité de Wald
   $$\mathbb{E}\left(\sum_{\ell=1}^{N} X_\ell\right) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

7 Très classique : inégalité de Chernoff

Soit X une variable aléatoire discrète réelle centrée et vérifiant $|X| \leqslant 1$.
On se donne $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de vaiid de même loi que X et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout n.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda X}\right) \leqslant \mathrm{ch}\,\lambda \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right)$.

8 X : inégalité de Tchebychev - Cantelli

1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle qui admet un moment d'ordre 2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,
   $$\mathbb{P}(X \geqslant \mathbb{E}(X) + \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{V}(X) + \lambda^2}.$$
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées ayant toutes un moment d'ordre 2.
   On suppose que pour tout n, $\mathbb{V}(X_n) \leqslant 1$, et on pose $N = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \leqslant 1\}$.
   Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

9 Entropie d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathscr{X}$.
Pour chaque $x \in \mathscr{X}$, on pose $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
On appelle **entropie** de X le réel $H(X) = -\sum_{x\in\mathscr{X}} p(x)\log(p(x))$ où l'on convient que $0\log 0 = 0$.

1. Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. À quelle condition celui-ci est-il nul ?

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$.
On appelle entropie conjointe de X et Y l'entropie de la variable aléatoire $Z = (X, Y)$, notée $H(X, Y)$.

2. On suppose $X \perp Y$. Montrer que $H(X,Y) = H(X) + H(Y)$.
3. On appelle entropie de X sachant Y la quantité $H(X \mid Y) = H(X,Y) - H(Y)$.
   Vérifier que
   $$H(X \mid Y) = \sum_{y\in\mathscr{Y}} \mathbb{P}(Y = y) H(X \mid Y = y)$$
   avec
   $$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathscr{X}} \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)\log(P(X = x \mid Y = y)).$$

10 Très classique : lemme de Borel-Cantelli

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements (d'éléments de $\mathscr{A}$, donc).

1. Déterminer, en utilisant des $\cap$, des $\cup$ et éventuellement des complémentaires, un évènement B...
   (a) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang.
   (b) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à une infinité de A_n.
   (c) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω appartient à au plus un nombre fini de A_n.
   (d) ...tel que $\omega\in\Omega$ appartienne à B si et seulement si ω n'appartienne à aucun A_n à partir d'un certain rang.

On note

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{p=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} A_n\right).$$

2. Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est un événement.
3. Que signifie $\omega\in\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$?
4. L'intersection qui sert à définir $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est-elle décroissante ? croissante ? Ni l'un ni l'autre ?
5. **Lemme de Borel-Cantelli, version « facile »** : On suppose que $\sum \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)=0.$$

6. Que signifie le résultat précédent ?
   (a) Presque sûrement, à partir d'un certain rang, aucun événement A_n ne se produit.
   (b) Presque sûrement, une infinité d'événements A_n se produisent.
   (c) Presque sûrement, à partir d'un certain rang, tous les événements A_n se produisent.
   (d) Presque sûrement, une infinité d'événements A_n ne se produisent pas.
7. **Borel-Cantelli « difficile »** : On reprend les notations de Borel-Cantelli « facile », mais on change les hypothèses : on suppose $\sum \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ et les A_n indépendants. On veut montrer que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right)=1.$$

   L'évènement $\limsup\limits_{n\to+\infty} A_n$ est un évènement « asymptotique », lorsque les A_n sont indépendants il est de probabilité 0 ou 1. C'est un exemple de vérification d'un résultat appelé la loi du $0-1$ de Kolmogorov.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)\leqslant \mathrm{e}^{-\mathbb{P}(A_n)}$.
   (b) En déduire que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=p}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=0$.
   (c) Conclure.
8. Un « singe dactylographe » tape sur une machine à écrire : à chaque frappe, il tape aléatoirement, avec même probabilité, une des 26 lettres de l'alphabet. Il ne s'arrête jamais. Montrer qu'il tapera presque sûrement une infinité de fois le mot JTKU, les Mémoires du Duc de Saint Simon, le poème « Demain, dès l'aube... », etc...(pour ces deux derniers exemples, on néglige ponctuation, espaces, accents...).
9. (a) Donner la probabilité, lorsqu'on lance $2n$ fois une pièce équilibrée ($n\geqslant 1$), d'obtenir exactement n fois Pile et n fois Face. Calculer un équivalent de cette probabilité, en utilisant par exemple la formule de Stirling.
   (b) Trois parties équitables de Pile ou Face, indépendantes, se déroulent simultanément sur trois tables. Montrer que, presque sûrement, il y a au plus un nombre fini d'instants auxquels on a égalité simultanément sur les trois tables de jeux (ie un nombre fini de n tels qu'après $2n$ lancers, on ait à chaque table obtenu exactement n fois Pile et n fois Face).

11 Convergence en probabilité d'une suite récurrente

Soit $q\geqslant 3$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de vaiid de loi uniforme sur $\left\{\frac{k}{q},\ k\in[\![0,q-1]\!]\right\}$.
On pose $T_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $T_{n+1}=T_n+\tau+\sin(2\pi(t_n-T_n))$.

1. Calculer $\mathbb{E}(T_n)$ pour tout n.
2. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{T_n}{n}-\lambda\right|>\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

*On dit que la suite de variables aléatoire $\left(\frac{T_n}{n}\right)$ **converge en probabilité** vers la variable aléatoire constante λ.*
Quand elle s'applique, la loi faible des grands nombres est la méthode la plus simple pour démontrer une convergence en probabilité.

12 Convergence en probabilité dans un jeu de pile ou face

On joue à Pile ou Face. On note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un nombre pair de piles dans les n premiers lancers, 0 sinon.

1. Montrer qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{e_1+\cdots+e_n}{n}-\ell\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

2. Montrer qu'il existe $\ell'\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{e_1e_2+\cdots+e_ne_{n+1}}{n}-\ell'\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

13 Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid de Rademacher : elles prennent la valeur 1 avec probabilité $p\in]0,1[$ et -1 avec probabilité $q=1-p$.
On pose $S_0=0$ et $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
On pose $a_n=\mathbb{P}(S_n=0)$ et on note $b_n=\mathbb{P}(S_1\neq 0,\ldots,S_{n-1}\neq 0,S_n=0)$ la probabilité que le premier retour en 0 se fasse après n pas. On considère les fonctions génératrices associées $A(s)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_ns^n$ et $B(s)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_ns^n$.

1. Montrer que pour $s\in[0,1[$, $A(s)=1+A(s)B(s)$.
2. Que vaut a_{2n+1} pour $n\in\mathbb{N}$? Exprimer a_{2n} en fonction de p, q et n.
   En déduire que $A(s)=\dfrac{1}{\sqrt{1+4pqs^2}}$, puis la valeur de $B(s)$ pour $s\in[0,1[$.
3. En déduire que la probabilité de retour à l'origine est $1-|p-q|$.
4. Montrer que si $p=\dfrac{1}{2}$, le temps moyen de retour à l'origine est infini.

14 Convergence presque sûre et convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.

1. Montrer que l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $X_n(\omega)\xrightarrow[n\to+\infty]{}X(\omega)$ est un événement.

On dit que $(X_n)_n$ **converge presque sûrement** vers X lorsque

$$\mathbb{P}\left(X_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}X\right)=1$$

On dit que $(X_n)_n$ **converge en probabilité** vers X lorsque

$$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

2. Montrer que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.
3. On suppose que, pour tout $\varepsilon>0$, il y a convergence de la série $\sum\mathbb{P}(|X_n-X|>\varepsilon)$. Utiliser le lemme de Borel-Cantelli pour montrer que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X.
4. Montrer que la convergence en probabilité de $(X_n)_n$ vers X entraîne la convergence presque sûre d'une suite extraite $\left(X_{\varphi(n)}\right)_n$ vers X.

15 Loi forte des grands nombres

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et suivant toutes la même loi d'espérance μ et de variance σ^2. On pose

$$S_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$$

et on veut montrer que $\mathbb{P}\left(S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mu\right)=1$.

1. Montrer que l'on peut supposer $\mu=0$.

On suppose désormais que $\mu=0$.

2. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(|S_n|>\varepsilon)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

3. Établir que la suite extraite $(S_{m^2})_{m\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et

$$T_n=\frac{1}{n}(X_{m^2+1}+\cdots+X_n)$$

4. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(|T_n|>\varepsilon)\leqslant\frac{2\sigma^2}{n^{3/2}\varepsilon^2}$$

5. Conclure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^2}$ converge presque sûrement vers 0.

16 Convergence en loi et séries génératrices

On ne considère dans ce problème que des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dira que la suite (X_n) **converge en loi** vers X lorsque, pour tout entier naturel k,

$$\mathbb{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(X=k)$$

1. Soit $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels telle que

$$\forall(k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \left|a_{k,n}\right|\leqslant M \tag{1}$$

   où M est un réel strictement positif.
   Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série entière $\sum_k a_{k,n}x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
2. On suppose encore que $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ vérifie (1), et que, de plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $\left(a_{k,n}\right)_{n>0}$ converge vers une limite ℓ_k.
   Montrer que la série entière $\sum_k \ell_k x^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et que, pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_{k,n}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k x^k$$

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on note G_{X_n} la fonction génératrice de X_n. Montrer que, si la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X, alors la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement vers G_X sur $]-1,1[$.
4. On considère encore dans cette question $\left(a_{k,n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels vérifiant (1). On note, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]-1,1[$,

$$h_n(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_{k,n}x^k.$$

   On suppose qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que, notant

$$h(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k x^k$$

   la suite (h_n) converge simplement vers h sur $]0,1[$.
   Montrer qu'alors

$$a_{0,n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}b_0$$

5. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, montrer que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement vers G_X sur $]0,1[$.
6. Montrer que, si chaque variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,p_n\right)$ où $np_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda>0$, la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
7. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(G_{X_n}\right)$ converge simplement sur $]0,1[$ vers une fonction qui n'est pas la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.