Espaces vectoriels normés, topologie

- Dans la définition d'une norme, c'est souvent l'inégalité triangulaire qui demande du travail. Ne pas oublier de vérifier que l'application est bien définie, lorsque ce n'est pas immédiat.
- Pour montrer que deux normes sont équivalentes : en dimension finie, c'est donné par un théorème du cours. En dimension infinie, on les domine mutuellement, c'est-à-dire qu'on cherche à obtenir α, β telles que $N \leqslant \alpha N'$ et $N' \leqslant \beta N$.
- Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, c'est plus délicat : il faut montrer qu'on n'a pas de α tel que $N \leqslant \alpha N'$ ou qu'on n'a pas de β tel que $N' \leqslant \beta N$. Une idée peut être de construire une suite (x_n) d'éléments de E telle que $N(x_n) \to +\infty$ et $(N'(x_n))$ bornée ou l'inverse, ou encore tel que $\dfrac{N'(x_n)}{N(x_n)} \to +\infty$.
- Attention, ouverts et fermés ne sont pas antinomiques. On peut être l'un et l'autre et on n'est, en général, ni l'un ni l'autre.
- Les caractérisations séquentielles sont très pratiques : si elles ne sont pas systématiquement utilisées, elles permettent souvent de faire des raisonnements concis.

Exercices cherchés en cours

1 CCINP 37 **2** CCINP 34 **3** CCINP 44 **4** CCINP 45

Normes

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.
Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $\|P\| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} |P(a_k)|$.
Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{K}_n[X]$.

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que cela définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7 Soit l'espace vectoriel $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1], R),\ f(0) = 0 \right\}$.
Pour toute fonction $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute fonction $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|$.
3. Démontrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

8 **Ex CCINP 38**
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
On pose $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$ où $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.
   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.
   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

9 Montrer que tout parallélogramme non aplati centré à l'origine est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^2$.

10 Soit N définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |x + ty|$. Montrer qu'il s'agit d'une norme et dessiner sa boule unité.

11 Montrer que la propriété d'inégalité triangulaire d'une norme peut être remplacée par la convexité de la boule unité (l'ensemble des $x \in E$ tels que $N(x) \leqslant 1$ est un convexe de E).
Indication : s'intéresser au segment d'extrémités les vecteurs unitaires associés à x et y.

12 Soit $E = \mathcal{C}([0,1], R)$ et $\varphi \in E$ une fonction telle que pour tout $x \in]0,1[$, $\varphi(x) > 0$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t) |f(t)| \, \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que N est dominée par N_∞.
3. Démontrer que les normes N_∞ et N ne sont pas équivalentes.

13 Montrer que toute norme est 1-lipschitzienne.

14 **Les inégalités de Hölder et de Minkowski dans $\mathbb{K}^n$**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $\alpha = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$ et $\beta = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $ab \leqslant \dfrac{1}{p} a^p + \dfrac{1}{q} b^q$.
2. On veut en déduire l'inégalité de Hölder sur $\mathbb{K}^n$ $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{1/q}$.
   Commencer par la démontrer en supposant $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p} = 1$ et $\|y\|_q = \sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^q} = 1$, puis, dans le cas général, en normalisant les vecteurs (c'est-à-dire en les divisant par $\|x\|_p$

et $\|y\|_q$, respectivement (Attention : on ne sait pas encore que ce sont des normes) lorsque c'est possible.)
Quelle inégalité classique retrouve-t-on en particulier ?

3. En remarquant que $\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n}|x_k||x_k+y_k|^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}|y_k||x_k+y_k|^{p-1}$, en déduire l'inégalité de Minkowski $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$.
4. Montrer que $\|x\|_p=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer la limite de $\|x\|_p$ lorsque $p\to+\infty$.

Remarque : On peut faire le même travail et obtenir des résultats similaires avec des intégrales de fonctions continues sur un segment $[a,b]$.

15 Retrouver le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire d'une norme euclidienne (inégalité de Minkowski). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne.

Topologie

$(E,\|\cdot\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Vrai ou faux

1. Un voisinage d'un point est toujours borné.
2. Une partie qui n'est pas ouverte est fermée.
3. Une intersection d'ouverts est ouverte.
4. L'adhérence d'une partie est toujours fermée.
5. Si un fermé contient une partie, il contient son adhérence.
6. Si une partie A est fermée, toute suite d'élément de A converge dans A.
7. Un point n'est pas intérieur à A si et seulement s'il est adhérent au complémentaire de A.

Ouverts, fermés

16 Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$, $\bigcap_{n\geqslant1}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[$.

17 Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que $\mathscr{H}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy=1\right\}$ est fermée.

18 Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

- $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<|x-1|<1\right\}$
- $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leqslant x\leqslant y\right\}$
- $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|<1,\ |y|\leqslant1\right\}$
- $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{Q}\ \text{et}\ y\in\mathbb{Q}\right\}$
- $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\notin\mathbb{Q}\ \text{ou}\ y\notin\mathbb{Q}\right\}$
- $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<4\right\}$

19 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E ouvert. Montrer que $F=E$.

20 Soit E un espace vectoriel normé, F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, p,q les projections associées à la somme directe $F\oplus G$ et A une partie de E.
Montrer que si A est ouverte, $p(A)$ est un ouvert (relatif) de F et $q(A)$ est un ouvert de G.
En est-il de même pour une partie fermée ?

21

1. Soit $P=X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme réel. Vérifier que les racines ξ de P satisfont
$$|\xi|\leqslant\max\{1,|a|+|b|+|c|\}.$$
2. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que le polynôme $P=X^3+aX^2+bX+c$ soit scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$

22 On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
2. $\ell^\infty(\mathbb{R})$ étant normé par $\|\cdot\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Adhérence, intérieur

23 Montrer que $\mathring{A}^c=\overline{A^c}$ et $\overline{A}^c=\mathring{\widehat{A^c}}$

24 Montrer que si A et B sont des parties de E telles que A est ouverte, alors $A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$ et que $A\cap B=\varnothing\Longrightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing$.

25 Si A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup A$ est l'unique majorant de A adhérent à A.

26 Si A et B sont deux parties de E, montrer que $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$, $\mathring{\widehat{A\cap B}}=\mathring{A}\cap\mathring{B}$, $\mathring{A}\cup\mathring{B}\subset\mathring{\widehat{A\cup B}}$ et donner des contre-exemples pour les inclusions réciproques.

27 Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

28 Soit F sous-espace vectoriel normé de E. Montrer que soit $F=E$ soit $\mathring{F}=\varnothing$.

29 Soit A une partie de E. Comparer par inclusion les parties A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$. Peut-on créer d'autres combinaison ?
Calculer tous ces ensembles pour $A=\{0\}\cup[1,2[\cup]2,3]\cup(\mathbb{Q}\cap[4,5])$.

30 Frontière

1. Comparer $\mathrm{Fr}\,A$ et $\mathrm{Fr}\,A^c$.
2. Montrer que $\mathrm{Fr}\,A \cup B \subset \mathrm{Fr}\,A \cup \mathrm{Fr}\,B$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que $\mathrm{Fr}\,\overline{A} \subset \mathrm{Fr}\,A$ et $\mathrm{Fr}\,\mathring{A} \subset \mathrm{Fr}\,A$. Ces inclusions sont-elles des égalités ?
4. Montrer que si A est fermée, alors $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}\,A) = \mathrm{Fr}\,A$.

Densité

31

Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

32

Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ dont soit denses, soit discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$ pour $a \in \mathbb{R}$.) Applications :

1. Soit b un entier au moins égal à 2. Montrer que $\left\{\frac{a}{b^k},\ (a,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On note $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ap + bq \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.
   Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer qu'entre π et $\pi + 10^{-9}$, il y a un réel de la forme $p + q\sqrt{2}$ où $p, q \in \mathbb{Z}$.

33

Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé est soit fermé, soit dense.

34

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $U \cap V$ est dense.