Exercices vus en cours

1 Montrer qu'on définit sur $\mathbb{R}[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, et en confondant polynôme et fonction polynomiale associée.

2 Définir sur $\mathbb{R}_n[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$, un produit scalaire rendant la base canonique orthonormale.

3 Si I est un intervalle et $L^2(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I telles que f^2 est intégrable, montrer que $L^2(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(f|g) = \int_I fg$ définit un produit scalaire sur $L^2(I)$.

4 Si $\ell^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des suites réelles de carré sommable (ie terme général de série – absolument – convergente) montrer qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et que $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ définit un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

5 **CCINP 76 – 79**

6 Orthonormaliser la base $e_1 = (0,1,1)$, $e_2 = (1,0,1)$, $e_3 = (1,1,0)$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Solution de 6 :

On pose $\varepsilon_1 = e_1 = (0,1,1)$.

Puis on cherche $\varepsilon_2 = e_2 + \lambda\varepsilon_1$ avec λ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 0$ ie $(\varepsilon_1|\mathrm{e}_2) + \lambda(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 + 2\lambda = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\varepsilon_2 = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En cherchant $\varepsilon_3 = e_3 + \mu\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2$ tel que $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 0$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$, on trouve $\mu = -\frac{1}{2}$ et $\nu = -\frac{1}{3}$. Soit $\varepsilon_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

On a obtenu trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux en dimension 3 : il s'agit d'une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Reste à normaliser pour obtenir une b.o.n. $\epsilon'_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\epsilon'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\epsilon'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

7 Dans $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales.

1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$ en utilisant le théorème de Weierstraß.

2. En déduire que $F \subsetneq \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = E$.
3. Soit $G = \{t \mapsto P(t)\sin(t)\ ;\ P \in F\}$. Montrer que $G^{\perp} = \{0\}$ et en déduire que $(F \cap G)^{\perp} \supsetneq F^{\perp} + G^{\perp}$.
4. Montrer que $\mathrm{d}\left(\exp, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Que vaut $\mathrm{d}(\exp, F)$? Est-elle atteinte ?
5. Montrer plus généralement que si $\mathrm{d}(f, F)$ est atteinte pour un $g \in F$, alors $f - g \in F^{\perp}$. Pour quelles fonctions est-ce le cas ?

8 CCINP 39 – 77

9

$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.

10 CCINP 92 – 80

11

Soit $E = \mathbb{R}^3$, P le plan d'équation cartésienne $x - z = 0$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à p ?

Solution de 11 :

Vecteur normal à P : $(1,0,-1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$p_P\big((x,y,z)\big) = (x,y,z) - \frac{(1,0,-1)\cdot(x,y,z)}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{2}(x+z), y, \frac{1}{2}(x+z)\right)$$

Donc $p_P(e1) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, $p_P(e2) = e_2$ et $p_P(e3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p_P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12 CCINP 81 – 82

13

Déterminer les équations des bissectrices, dans un repère orthonormal du plan, de $\mathscr{D} : 3x + 4y = 0$ et $\mathscr{D}' : 5x - 12y = 0$.

Produit scalaire

14 Le retour des polynômes de Tchebychev

1. Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles $\langle P,Q\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} P(t)Q(t)dt$.
   On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont définis par la relation, valable pour tout n entier naturel et tout réel θ , $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. Démontrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale ce produit scalaire.
2. Soit E l'espace $C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que, si $(f,g)\in E^2$, $\langle f,g\rangle_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)dt$ est bien défini. Montrer que l'on construit ainsi un produit scalaire sur E.

15 Soient f et g des applications de E dans E telles que $\forall (x,y)\in E^2, (f(x)|y) = (x|g(y))$.

Montrer que f et g sont linéaires.

Solution de 15 :

Par symétrie, il suffit de montrer par exemple que f est linéaire.

Soient $x, x'\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On veut montrer que $f(x+\lambda x') = f(x)+\lambda f(x')$.

On calcule, pour $y\in E$,

$$\begin{aligned}\left(f(x+\lambda x')-f(x)-\lambda f(x')\middle| y\right) &= \left(f(x+\lambda x')|y\right) - \left(f(x)|y\right) - \lambda\left(f(x')\middle| y\right)\\ &= \left(x+\lambda x'|g(y)\right) - \left(x|g(y)\right) - \lambda\left(x'\middle| g(y)\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

donc $f(x+\lambda x')-f(x)-\lambda f(x') \in E^{\perp} = \{0\}$.

16 Vérifier que l'égalité suivante définit un produit scalaire sur l'espace des fonctions polynômes réelles :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer qu'il existe une unique suite orthogonale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tels que pour tout n, P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré n.
2. Démontrer qu'il existe deux suites (λ_n) et (μ_n) de réels telles que, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, $P_n = (X-\lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$
   (Indication : décomposer XP_{n-1} dans la base des P_k).

On définit les polynômes de Hermite par $H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} h_n^{(n)}(x)$ où $h_n(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

On peut montrer qu'ils forment une famille orthonormale pour ce produit scalaire. Quitte à les diviser par leur cœfficient dominant 2^n, on obtient les polynômes P_n.

Solution de 16 :

1. L'existence vient de Gram-Schmidt.
   Pour l'unicité, on prend deux suites (P_n), (Q_n) convenant, et pour tout n, on décompose $P_n \in \mathrm{Vect}(Q_0,\dots,Q_n)$ et on obtient $P_n = Q_n$ par orthogonalité.
2. XP_{n-1} de degré n et unitaire se décompose dans la base orthogonale $(P_0,\dots,P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $XP_{n-1} = \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1}P_{n-1} + P_n$, avec $\lambda_i = \frac{(P_i|XP_{n-1})}{\|P_i\|} = \frac{(XP_i|P_{n-1})}{\|P_i\|} = 0$ si $i < n-2$ pour des raisons de degré.

17 **Écrit Mines – CCINP** On considère le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt$ sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer qu'il existe une suite orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout n.
3. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que P_n possède k racines de multiplicité impaire dans $]0,1[$, $a_1,\dots,a_k$, avec $k < n$.
   (a) Vérifier que, si $Q = \prod_{i=1}^{k}(X - a_i)$, alors $(P_n|Q) = 0$
   (b) En écrivant $(P_n|Q)$ sous forme intégrale, aboutir à une contradiction.
   (c) Démontrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont toutes dans $]0,1[$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ les racines de P_n. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on ait
$$\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$
Donner une expression de ces scalaires en fonction des intégrales sur $[0,1]$ des L_k, où les L_k désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à la famille $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.
5. On reprend les notations de la question précédente. En utilisant la division euclidienne par P_n, montrer que
$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \qquad \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)\ .$$
Ce type de résultat est à la base des méthodes de Gauss pour les calculs approchés d'intégrales.

18 Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de son produit scalaire canonique. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les parties de E contenant les fonctions paires et impaires respectivement.
Montrer que $\mathscr{I} = \mathscr{P}^\perp$ et déterminer la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$.

19 Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2\left(\sqrt{2}\right)^n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Solution de 19 :
Cauchy-Schwarz.

20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels. Montrer que $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + \cdots x_n^2\right)$.
Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Solution de 20 :
Cauchy-Schwarz.

21 Soient a et b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$ et de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. On étudie l'endomorphisme f de E donné par
$$f(x) = x - (a \mid x) \cdot b.$$

1. À quelle condition simple l'endomorphisme f est-il bijectif ?
2. À quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Solution de 21 :

1. f est facilement linéaire sur un espace de dimension finie, son injectivité suffit.
Or si $f(x)=0_E$, $\|x\|=|(a\mid x)|$. Comme $\|a\|=1$, c'est un cas d'égalité de Cauchy-Schwarz donc x est colinéaire à a : on a $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $x=\lambda a$. Mais alors $f(x)=0_E=\lambda a-\lambda\|a\|^2 b=\lambda(a-b)$.
On en déduit que
    - si $a\neq b$, $\lambda=0$ et $\operatorname{Ker} f=\{0_E\}$ donc f est injectif donc bijectif.
    - si $a=b$, on reconnaît l'expression de la projection orthogonale sur à $(\mathbb{R}a)^\perp$ qui n'est pas bijective $f(a)=0_E$ et $a\neq 0_E$...).

   Autre rédaction possible : on complète (a) en une base orthonormée $\mathscr{B}=(a,e_2,\dots,e_n)$ de E.
La matrice de f dans $\mathscr{B}$ est $A=\begin{pmatrix}1-b_1 & & & (0)\\ -b_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -b_n & (0) & & 1\end{pmatrix}$, de déterminant $1-b_1=1-(a|b)$, donc f est bijective si et seulement si $(a|b)\neq 1$.
Or $(a|b)=1 \iff (a|b)=|(a|b)|=\|a\|\,\|b\| \iff a$ et b positiviement liés $\iff a=b$ car ils sont de même norme.
2. En utilisant la matrice, on a $\chi_f=(X-1+(a|b))(X-1)^{n-1}$ et $A-I_n$ est de rang 1 si et seulement si $b\neq 0_E$.
Donc f est diagonalisable si et seulement si $b=0_E$ ou $(b\neq 0_E$ et $(a|b)\neq 0)$.

22 Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\|\leqslant\|X\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

1. Établir $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|A^\intercal X\|\leqslant\|X\|$.
2. Soit $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX=X$ alors $A^\intercal X=X$
3. Établir $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\operatorname{Ker}(A-I_n)\oplus\operatorname{Im}(A-I_n)$.

Solution de 22 :

1. On a
$$\left\|A^\top X\right\|^2=X^\top AA^\top X=\left\langle X,AA^\top X\right\rangle$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left\|A^\top X\right\|^2=\left\langle X,AA^\top X\right\rangle\leqslant\|X\|\left\|AA^\top X\right\|\leqslant\|X\|\left\|A^\top X\right\|.$$
Ainsi,
$$\left\|A^\top X\right\|\leqslant\|X\|$$
et ce, que $A^\top X=0$ ou non.
2. Si $AX=X$ alors
$$\left\|A^\top X-X\right\|^2=\left\|A^\top X\right\|^2-2\left\langle A^\top X,X\right\rangle+\|X\|^2\leqslant 2\left(\|X\|^2-X^\top AX\right)=0.$$
On en déduit $A^\top X=X$.

3. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n)$.
   On a $AX = X$ (et donc $A^\top X = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.
$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y \rangle = X^\top AY - X^\top Y.$$
   Or
$$X^\top AY = \left(A^\top X\right)^\top Y = X^\top Y$$
   et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi,
$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \cap \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n) = \{0\}.$$
   Enfin, le théorème du rang
$$\dim \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) + \mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_n) = \dim E$$
   permet de conclure
$$E = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{Im}(A - \mathrm{I}_n).$$

Projection orthogonale

23 On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit D la droite d'équation $x = -y = z$, s la symétrie orthogonale par rapport à D et p le projecteur orthogonal sur D.

1. Déterminer les matrices de s et p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Considérons les applications f et g définies sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :
$$f(x, y) = \left\langle x \middle| p(y) \right\rangle \text{ et } g(x, y) = \left\langle x \middle| s(y) \right\rangle.$$
   Démontrer que f et g sont des formes bilinéaires symétriques. Sont-elles définies positives ?

24 **Oral Mines** Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien, p un projecteur de E.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall\, x \in E,\ \left\|p(x)\right\| \leqslant \|x\|$.

Solution de 24 : Oral Mines

Le sens direct s'appelle inégalité de Bessel, c'est du cours (et une conséquence du théorème de Pythagore.)

L'autre sens est moins évident et se voit bien sur un dessin par contraposée.

On suppose que la projection p n'est pas orthogonale, et on cherche un vecteur $x \in E$ tel que $\left\|p(x)\right\| > \|x\|$.

p étant la projection sur F parallèlement à G, avec $G^\perp \neq F$, il apparaît assez clairement sur un dessin que si $x \in G^\perp \setminus F$, $\left\|p(x)\right\| > \|x\|$. Vérifions-le.

On a $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$. Comme $x \in G^\perp$, on peut appliquer le théorème de Pythagore :
$$\left\|p(x)\right\|^2 = \left\|x - (x - p(x))\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|x - p(x)\right\|^2 > \|x\|^2$$
car $x \notin F$ donc $x - p(x) \neq 0_E$. Reste à voir que $G^\perp \setminus F \neq \varnothing$, c'est-à-dire $G^\perp \not\subset F$. Si ce n'était pas le cas, par égalité des dimensions, on aurait $G^\perp = F$, ce qui est exclu ici.

On peut aussi faire une preuve directe, plus astucieuse. On suppose que la projection p sur F parallèlement à G est telle que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Si $(x, y) \in F \times G$ et $t \in \mathbb{R}$, on considère

$$\|p(tx+y)\|^2 = t^2\|x\|^2 \leqslant \|tx+y\|^2 = t^2\|x\|^2 + 2t(x|y) + \|y\|^2$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2t(x|y) + \|y\|^2 \geqslant 0$ ce qui implique $(x|y) = 0$ (comme dans la preuve de Cauchy-Schwarz dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique positive : reconnaître une équation de droite ou faire $t \to \pm\infty$).

Distance à un sous-espace

25 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on définit $v_1 = (1,2,-1,1)$, $v_2 = (0,3,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Déterminer un système d'équations (dans la base canonique) et une base orthonormale de $F^\perp$.
2. Soit $e_1 = (1,0,0,0)$. Calculer $\mathrm{d}(e_1, F)$.

26 Calculer, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\inf\limits_{M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum\limits_{i,j \in [\![1,n]\!]} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$

Solution de 26 :

Dans ce genre d'exercice qui se pose à l'oral, l'important est d'identifier un problème de projection orthogonale. Comme dans l'exercice précédent. Ensuite, il faut trouver la réponse aux questions suivante : dans quel espace ? ici, assez clairement, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour quel produit scalaire ? ici, le produit scalaire canonique, qui est donné par

$$(U|V) = \sum_{i,j} U_{i,j} V_{i,j} = \mathrm{tr}(U^\intercal\ V)$$

Sur quel sous-espace ? sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Une bonne idée est de déterminer une base orthonormale de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire canonique. Une meilleure est de montrer que, pour ce produit scalaire canonique,

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$$

Alors le théorème de projection orthogonale dit que la borne inférieure recherchée est un minimum, atteint en un point unique :

$$M = P_{\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{1}{2}(A + A^\intercal)$$

et valant

$$\left\| \frac{1}{2}(A - A^\intercal) \right\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \left(a_{i,j} - a_{j,i}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(a_{i,j} - a_{j,i}\right)^2$$

27 Pour tous réels a, b, c, on pose $I(a,b,c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x$. Démontrer qu'il existe un unique triplet (a,b,c) tel que $I(a,b,c)$ soit minimum et le déterminer.

Solution de 27 :

Il s'agit de la distance euclidienne de X^3 au sous-espace de dimension finie $F=\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_X$.

Il est atteint en l'unique $P_F\left(X^3\right)=aX^2+bX+c\in F$ tel que $X^3-P_F\left(X^3\right)\in F^{\perp}$, donc est orthogonal à X^2, X et 1.

On trouve $a=c=0$ et $b=\dfrac{1}{5}$ après calculs.

28 Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

Si $u_1,\dots,u_n$ sont n vecteurs d'un espace préhilbertien réel $\left(E,\langle .,.\rangle\right)$, on définit leur matrice de Gram, $G(u_1,\dots,u_n)$, comme la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient en ligne i et colonne j est $\langle u_i,u_j\rangle$.

1. Démontrer que si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée alors le déterminant de sa matrice de Gram est nul (on pourra commencer par supposer que u_n s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_i).
2. On suppose maintenant $(u_1,\dots,u_n)$ libre, et on considère $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de Vect$(u_1,\dots,u_n)$. On note :
$$A=\mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u_1,\dots,u_n).$$
   (a) Exprimer $G=G(u_1,\dots,u_n)$ à l'aide d'un produit faisant intervenir A et sa transposée.
   (b) Montrer que le déterminant de G est strictement positif.
3. On suppose la famille $(u_1,\dots,u_n)$ libre ; on désigne par F le s.e.v. engendré par $(u_1,\dots,u_n)$, et par x un vecteur de E. Démontrer :
$$\left[d(x,F)\right]^2 = \frac{\det\big(G(u_1,\dots,u_n,x)\big)}{\det\big(G(u_1,\dots,u_n)\big)}$$
On pourra par exemple, dans le calcul de $\det\big(G(u_1,\dots,u_n,x)\big)$ *écrire* $x=(x-z)+z$, z *désignant le projeté orthogonal de* x *sur* F.

Solution de 28 : Déterminants de Gram – grand classique de l'oral et de l'écrit

1. Supposons $u_n=\alpha_{n-1}u_{n-1}+\ldots+\alpha_1u_1$. Alors, pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$,
$$\langle u_i,u_n\rangle=\alpha_{n-1}\langle u_i,u_{n-1}\rangle+\ldots+\alpha_1\langle u_i,u_1\rangle$$
ou encore
$$\begin{pmatrix}\langle u_1,u_n\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_n\rangle\end{pmatrix}=\alpha_{n-1}\begin{pmatrix}\langle u_1,u_{n-1}\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_{n-1}\rangle\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_1\begin{pmatrix}\langle u_1,u_1\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,u_1\rangle\end{pmatrix}$$
que l'on peut lire de la manière suivante :
$$c_n=\alpha_{n-1}c_{n-1}+\ldots+\alpha_1c_1$$
où les c_k sont les colonnes de la matrice de Gram $G(u_1,\dots,u_n)$. Les colonnes étant liées, le déterminant est nul.
Dans le cas général, il n'est pas nécessaire que u_n soit combinaison linéaire des autres u_i. Mais si la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée, au moins un des u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres u_k. Et on conclut de la même manière, en montrant que la colonne c_i est alors combinaison linéaire des autres.

2. Rappelons que, pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$,

$$G_{i,j} = \langle u_i, u_j\rangle$$

et, la base $(e_1,\ldots,e_n)$ étant orthonormale,

$$A_{i,j} = \langle e_i, u_j\rangle$$

Mais d'autre part (calcul du produit scalaire dans une base orthonormale) :

$$\begin{aligned} G_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u_i\rangle\langle e_k, u_j\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{k,i}A_{k,j} \\ &= (A^{\mathsf{T}}\ A)_{i,j} \end{aligned}$$

et donc

$$G = A^{\mathsf{T}}A$$

On en déduit

$$\det(G) = (\det A)^2 > 0$$

($A \in GL_n(\mathbb{R})$). En fait, on peut dire plus : G est symétrique définie positive.

3. La dernière colonne de $G(u_1,\ldots,u_n,x)$ est

$$\begin{pmatrix} \langle u_1,x\rangle \\ \langle u_2,x\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n,x\rangle \\ \langle x,x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1,z\rangle \\ \langle u_2,z\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n,z\rangle \\ \langle x,z\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \langle u_1,x-z\rangle \\ \langle u_2,x-z\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n,x-z\rangle \\ \langle x,x-z\rangle \end{pmatrix}$$

où z est le projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. Donc :

$$\begin{pmatrix} \langle u_1,x\rangle \\ \langle u_2,x\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n,x\rangle \\ \langle x,x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1,z\rangle \\ \langle u_2,z\rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle u_n,z\rangle \\ \langle z,z\rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \langle x-z,x-z\rangle \end{pmatrix}$$

Utilisons la linéarité du déterminant par rapport à sa dernière colonne. On obtient, notant $g(\ldots) = \det(G(\ldots))$:

$$g(u_1,\ldots,u_n,x) = g(u_1,\ldots,u_n,z) + \begin{vmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle u_1,u_n\rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \langle u_n,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle u_n,u_n\rangle & 0 \\ \langle z,u_1\rangle & \ldots & \ldots & \langle z,u_n\rangle & \|x-z\|^2 \end{vmatrix}$$

(on réutilise le fait que $\langle u_k,x\rangle = \langle u_k,z\rangle + \langle u_k,x-z\rangle = \langle u_k,z\rangle$). On développe alors par rapport à la dernière colonne le dernier déterminant ; tenant compte de la nullité de $g(u_1,\ldots,u_n,z)$ (famille liée), on conclut :

$$g(u_1,\ldots,u_n,x) = \|x-z\|^2\ g(u_1,\ldots,u_n)$$