36 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x\in[0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha>0$, $\mathbb{P}(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right]=B_n(f)(x)$.
2. (a) Soit $\varepsilon>0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(a,b)\in[0,1]^2$, $|a-b|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbb{P}(S_n=k)\right|\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|<2\varepsilon$, puis conclure.

1. a) Cf preuve de la loi faible des grands nombres.

$\mathbb{E}(S_n)=nx \qquad \mathbb{V}=nx(1-x)$

$$\mathbb{P}(|S_n-nx|>n\alpha)\underset{\substack{\text{(croissance}\\ \text{de }\mathbb{P})}}{\leq}\mathbb{P}(|S_n-nx|\geqslant n\alpha)\underset{BT}{\leq}\frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n\alpha)^2}=\frac{x(1-x)}{n\alpha^2}=\frac{\frac14-(x-\frac12)^2}{n\alpha^2}\leq\frac{1}{4n\alpha^2}$$

b) $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_n=k)\,f\left(\frac{k}{n}\right)$ formule de transfert

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= B_n(f)(x).$$

2. a) f étant C^0 sur le SEGMENT $[0,1]$, elle y est UC par thm de Heine.

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \ \forall a, b \in [0,1], \quad |a-b| \leq \alpha \Rightarrow |f(a)-f(b)| < \varepsilon$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $\Big|\underbrace{\frac{k}{n}}_{\in[0,1]} - \underbrace{x}_{\in[0,1]}\Big| \leq \alpha$.

$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbb{P}(S_n=k)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right).$$

alors $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$.

b)

$$\left|\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \text{tq} \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \mathbb{P}(S_n = k)\right| \underset{\text{IT}}{\leq} \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \overbrace{\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right|}^{\underset{\text{IT}}{\leq} 2\|f\|_\infty \text{ (} f \text{ bornée car } C^0 \text{ sur un SEGMENT)}} \times \mathbb{P}(S_n = k)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ \text{tq} \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}} \mathbb{P}(S_n = k)$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$$

(c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et tout réel $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, puis conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$

$$|B_n(f)(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right|$$

$$= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right|$$

$$\underset{IT}{\leq} \left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right| + \left| \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| > \alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbb{P}(S_n = k) \right|$$

$$\underset{IT}{\leq} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq \varepsilon \text{ par a)}} \times \mathbb{P}(S_n = k) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha \right)$$

$$\leq \varepsilon \times \underbrace{\sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha} \mathbb{P}(S_n = k)}_{= \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \alpha\right) \leq 1} + 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\alpha^2}$$

$$2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\alpha^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$: On a $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0, \quad 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\alpha^2} < \varepsilon$$

Donc si $n > n_0$,

$$\forall x \in [0,1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

ie $$\|B_n(f) - f\|_\infty < 2\varepsilon$$

Donc $$\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

f est limite uniforme de la suite de f° polynomiales $(B_n(f))_n$.

<u>Pour lundi</u> : 14, 19, 27 (espaces préhilbertiens.)