23 Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.

On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.

Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^e boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r,b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^e tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall n \geqslant 2,\quad p_n(r,b) = \frac{\overbrace{r}^{=\mathbb{P}(R_1)}}{r+b} p_{n-1}(r+c,b) + \frac{\overbrace{b}^{=\mathbb{P}(\overline{R_1})}}{r+b} p_{n-1}(r,b+c)$$
on tire n-1 boules à partir de $(r+c,b)$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.

   On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^e et n^e tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

1 - $\mathbb{P}(R_1 | R_2) = \dfrac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_1})}$. Formule de Bayes sce $(R_1, \overline{R_1})$

$$= \frac{\frac{r+c}{r+c+b} \times \frac{r}{r+b}}{\frac{r+c}{r+c+b} \times \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+c} \times \frac{b}{r+b}}$$

$$= \frac{r(r+c)}{r(r+c) + rb}$$

$$= \frac{r+c}{r+b+c} \quad \left(= \mathbb{P}(R_2 | R_1)\right)$$

2 - sce $(R_1, \overline{R_1})$

FPT :

$$p_n(r,b) = \mathbb{P}(R_n)$$
$$= \boxed{\mathbb{P}(R_n | R_1)}\,\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|\overline{R_1})\,\mathbb{P}(\overline{R_1})$$
$$= \frac{r}{r+b} \times p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} \times p_{n-1}(r,b+c)$$

Sachant R_1 réalisé, on est dans une situa° où il faut réaliser $n-1$ tirage à partir d'une urne $(r+c, b)$.

3_ But : $\forall n$, $\mathbb{P}(R_n) = \frac{r}{r+b}$

par récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $\forall r, b \in \mathbb{N}^*$, $p_n(r,b) = \frac{r}{r+b}$ »

$n=1$: ✓

Soit $n \geq 2$ tel $\mathcal{P}(n-1)$ vrai

$$p_n(r,b) \underset{HR}{=} \frac{r}{r+b} \times \frac{r+c}{r+c+b} + \frac{b}{r+b} \times \frac{r}{r+b+c} = \dots = \frac{r}{r+b}.$$

4_ $\mathbb{P}(R_m \cap R_n)$

5_ $\underbrace{\mathbb{P}(R_m)}_{\checkmark} = \mathbb{P}(R_m \cap (R_n \sqcup B_n))$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(R_m \cap R_n)}_{\checkmark} + \mathbb{P}(R_m \cap B_n)$$

31 **Taux de panne – Oral CCINP** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X \geqslant n) > 0.$$

On définit le taux de panne de X par la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ avec

$$x_n = \mathrm{P}(X = n \mid X \geqslant n).$$

1. Montrer que si l'on pose $\mathrm{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une loi de probabilité.

   Déterminer le taux de panne de Y.
2. Dans le cas général, établir

$$\forall n \geqslant 2, \mathrm{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$$

3. En déduire une expression de $\mathrm{P}(X = n)$ en fonction des x_k valable pour tout $n \geqslant 1$.
4. Déterminer les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant.

1 - cf 9

Soit $n \geqslant 1$. $\mathbb{P}(Y=n \mid Y \geqslant n) = \dfrac{\mathbb{P}(Y=n, Y\geqslant n)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)} = \dfrac{\mathbb{P}(Y=n)}{\mathbb{P}(Y\geqslant n)} = \dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)} = \dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}$

$= \dfrac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n} - 0}$

$= \dfrac{1}{n+1}$

2 - Par récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1-x_k)$ » pour $n \geqslant 1$.

- $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 = \prod_{k=1}^{0} (1 - x_k)$
- Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$\mathbb{P}(X \geq n+1) + \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n)$

donc $\mathbb{P}(X \geq n+1) \underset{HR}{=} \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n)\, \mathbb{P}(X \geq n)$

$= (1 - x_n)\, \mathbb{P}(X \geq n)$

$\underset{HR}{=} \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k)$

3 - Soit $n \geq 1$.

$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n)\, \mathbb{P}(X \geq n)$

$= x_n \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$

4 - Analyse : Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = p \in [0,1]$ et même $p \in]0,1[$ avec les hypothèses.

$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1} p$

$X \sim \mathcal{G}(p)$

Synthèse : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$.

$$\mathbb{P}(X \geq n) = (1-p)^{n-1} \geq 0$$

$$x_n = \mathbb{P}(X = n \mid X \geq n) = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geq n)} = \frac{(1-p)^{n-1} p}{(1-p)^{n-1}} = p.$$