Exercices vus en cours

1 CCINP 95 à 111

2

On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A,B,C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B\cap C$, ni de $B\cup C$.

Solution de 2 :

$\Omega=[\![1,6]\!]^2$, probabilité uniforme.

$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{4}$,

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cap C).$$

$\mathbb{P}(B\cup C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

$$\mathbb{P}\big(A\cap(B\cup C)\big)=\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\cup C).$$

---

3 Indicatrice d'Euler

Soit $\Omega=[\![1,n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d=\{kd\mid k\in\Omega \text{ et } kd\in\Omega\}$.

1. Quelle est la probabilité de A_d ?
2. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.
   (a) Démontrer que $(A_p)_{p\in P}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

Solution de 3 : Indicatrice d'Euler

1. $\mathbb{P}(A_d)=\dfrac{|A_d|}{|\Omega|}=\dfrac{\frac{n}{d}}{n}=\dfrac{1}{d}$.
2. (a) Si $p_1,\dots,p_\ell$ sont des diviseurs premiers deux à deux distincts de n, comme ils sont premiers, $\bigcap_{j=1}^{\ell}A_{p_j}=A_{p_1\cdots p_\ell}$.
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\ell}A_{p_j}\right)=\mathbb{P}(A_{p_1\cdots p_\ell})=\frac{1}{p_1\cdots p_\ell}=\prod_{j=1}^{\ell}\mathbb{P}(A_{p_j}).$$
   (b) Les $\overline{A}_p$ sont aussi indépendant, $A=\bigcap_{p\in P}\overline{A}_p$, $\mathbb{P}(A)=\dfrac{\varphi(n)}{n}=\prod_{p\in P}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$.

4

Si $A_1,\dots,A_n$ sont indépendants, $1\leqslant p\leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n}A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n}A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n}A_i$,

Solution de 4 :

- Direct,
- $A_1,\dots,A_p,\overline{A_{p+1}},\dots,\overline{A_n}$ sont indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n}\overline{A_i}=\overline{\bigcup_{i=p+1}^{n}A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^{p}A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n}A_i$.
- idem avec $\overline{A_1},\dots,\overline{A_p},\overline{A_{p+1}},\dots,\overline{A_n}$.

---

5 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X,Y).

Solution de 5 :

X \ Y	1	2	3	4	5	6	loi de X
1	$1/36$	0	0	0	0	0	$1/36$
2	$1/18$	$1/36$	0	0	0	0	$1/12$
3	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	0	0	$5/36$
4	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	0	$7/36$
5	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	0	$9/36$
6	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/36$	$11/36$
loi de Y	$11/36$	$9/12$	$7/36$	$5/36$	$3/36$	$1/36$	(1)

6 Soient X_1, X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$ et $X_3 = X_1 \times X_2$.

Montrer que X_1, X_2, X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

Solution de 6 :

$$\mathbb{P}(X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)+\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{2}$$

Donc $X_3 \sim \mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$.

Alors X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1 \perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_3=-1)$$

$$\mathbb{P}(X_1=-1,X_3=-1)=\mathbb{P}(X_1=-1,X_2=1)=\frac{1}{4}=\mathbb{P}(X_1=-1)\mathbb{P}(X_3=1)$$

Donc $X_1 \perp X_3$ et par symétrie, $X_2 \perp X_3$.
Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}.$$

7 Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, montrer que $Y = n - X \sim \mathscr{B}(n,q)$.

Probabilités

8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n,n+1,\dots\}) = \lambda a_n$.

Solution de 8 :

Si une telle probabilité existe, alors $1 = \mathbb{P}(N) = \lambda a_0$ avec $a_0 > 0$ vu les hypothèses donc $\lambda = \dfrac{1}{a_0}$.

Réciproquement, avec un tel lambda, si $A_n = [\![n,+\infty [\![$, alors $\mathbb{P}(\{n\}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda(a_n - a_{n+1}) \geqslant 0$ et $\sum \lambda(a_n - a_{n+1})$ télescopique de somme $\lambda(a-0-0)=1$ d'où l'existence de $\mathbb{P}$ d'après la propriété du cours.

9 Sur l'univers $\mathbb{N}^*$, muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ unique telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$.

Solution de 9 :

On a bien que les $\dfrac{1}{n(n+1)}$ sont positifs et comment ils valent $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, ils sont sommables de somme (télescopique) $1-0=1$, d'où l'existence de $\mathbb{P}$.

Puis on calcule $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 1 - \ln 2.$

---

10 **Le problème des clés** Au lycée Leconte de Lisle, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.

De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.

Vous les essayez donc l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^e clé testée qui vous ouvre la porte $(1 \leqslant k \leqslant n)$?

Solution de 10 : Le problème des clés

Soit A_j l'événement « la clé n° j est la bonne ».

L'événement auquel on s'intéresse est alors $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

D'après la formule des probabilités composées, sa probabilité est (en modélisant chaque situation par une probabilité uniforme)

$$\mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)\cdots\mathbb{P}\left(A_k\middle|\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{k-1}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

Logique ou non ?

---

11 Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^e tirage ?

12 **Poker**

Dans un jeu de 52 cartes classiques, on distribue des mains de 5 cartes. Calculer les probabilités des événements :

- QFR : « Avoir une quinte flush royale » (quinte à l'as et couleur),
- QF : « Avoir une quinte flush non royale » (quinte non royale et couleur),
- A_4 : « Avoir un carré » (les 4 cartes de même valeur),
- F : « Avoir un full » (un brelan et une paire),
- C : « Avoir une couleur qui ne soit pas une quinte » (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas),
- Q : « Avoir une quinte non flush » (5 cartes qui se suivent, pas toutes de la même couleur),
- A_3 : « Avoir un brelan » (exactement 3 cartes de même valeur),
- PP : « Avoir une double paire » (2 paires ne formant pas un carré),
- A_2 : « Avoir une paire » (exactement 2 cartes de même valeur),
- R : « Rien de tout ça ! ».

On devra trouver :

Événement	QFR	QF	A_4	F	C	Q	A_3	PP	A_2	R
Probabilité (%) ≈	0,00015	0,0014	0,024	0,14	0,20	0,40	2,1	4,8	42	50

Solution de 12 : Poker

$\Omega = \mathscr{P}_5(\mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ ensemble des cartes. $|\Omega| = \binom{52}{5} = 2\,598\,960$, proba uniforme.

- $|QFR| = 4$; $\mathbb{P}(QFR) = \dfrac{1}{649\,740}$.
- $|QF| = 4 \times 9 = 36$; $\mathbb{P}(QF) = \dfrac{3}{216\,580}$.
- $|A_4| = 13 \times 48 = 624$; $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{1}{4165}$.
- $|F| = 13 \times \binom{4}{1} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3\,744$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{6}{4\,165}$.
- $|C| = 4 \times \binom{13}{5} - 40 = 5\,108$; $\mathbb{P}(F) = \dfrac{1\,277}{649\,740}$.
- $|Q| = 4^5 \times 10 - 40 = 10\,200$; $\mathbb{P}(Q) = \dfrac{5}{1\,274}$.
- $|A_3| = 13 \times \binom{4}{1} \times \binom{12}{2} \times 4^2 = 54\,912$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{88}{4\,165}$.

- $|PP| = \binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 44 = 123\ 552$; $\mathbb{P}(PP) = \dfrac{198}{4\ 165}$.
- $|A_2| = 13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4^3 = 1\ 098\ 240$; $\mathbb{P}(A_3) = \dfrac{352}{833}$.
- $|R| = \left(\binom{13}{5} - 10\right)\left(4^5 - 4\right) = 1\ 302\ 540$; $\mathbb{P}(R) = \dfrac{1\ 277}{2\ 548}$.

13

Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de $99\ \%$ lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0{,}1\ \%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Solution de 13 :

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0{,}99$ et $\mathbb{P}\left(T \;\middle|\; \overline{M}\right) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}\left(T \;\middle|\; \overline{M}\right)\mathbb{P}\left(\overline{M}\right)} = \frac{0{,}99 \cdot 10^{-5}}{0{,}99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9\ \%.$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

14 Le problème de Monty Hall

Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

Solution de 14 : Le problème de Monty Hall

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».
Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.
On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.
Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».
On cherche $\mathbb{P}(F_2 \mid A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).
D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A \mid F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A \mid F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A \mid F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A \mid F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A \mid F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A \mid F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 \mid A) = \frac{2}{3}$ et $\boxed{\text{le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.}}$

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

15 Distance la plus probable

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour d compris entre 1 et $n-1$, calculer la probabilité que deux amis soient distants de d places (c'est-à-dire séparés par $d-1$ personnes.) Quelle est la distance la plus probable ?
Même question s'ils sont placés sur un cercle.

Solution de 15 : Distance la plus probable
$\Omega = \mathfrak{S}_n$, proba uniforme, $|\Omega| = n!$.
A_d : « la distance est d ».
$|A_d| = 2 \times (n-d) \times (n-2)!$
$\boxed{\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2(n-d)}{n(n-1)}}$ maximale lorsque $d = 1$ (amis côte à côte).

Autre possibilité : seulement la position des amis, $\Omega = \mathscr{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$, proba uniforme. $|\Omega| = \binom{n}{2}$.

$|A_d| = n-d$ (choix du premier). D'où le résultat.

Sur un cercle : $\boxed{\mathbb{P}(A_d) = \dfrac{2n}{n(n-1)} = \dfrac{2}{n-1}}$ ne dépend pas de d, sauf si n est pair et $d = \frac{n}{2}$ auquel cas $\boxed{\mathbb{P}(A_{n/2}) = \dfrac{1}{n-1}}$.

---

16 Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2,..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1 + \cdots + N_k = N$).

On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_i boules de couleur c_i pour chaque i (donc $n_1 + \cdots + n_k = n$).

Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise et comparer les résultats.

Solution de 16 :

- $\boxed{p = \dfrac{\binom{N_1}{n_1} \cdots \binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}}$.
- $\boxed{p = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \dfrac{N_1^{n_1} \cdots N_k^{n_k}}{N^n}}$ (répartition pour les couleurs = comme les anagrammes).
- $\boxed{p = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \dfrac{A_{N_1}^{n_1} \cdots A_{N_k}^{n_k}}{A_N^n}}$ et on retrouve la première proba.

---

17 Problème des anniversaires et des coïncidences

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons avec remise. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour (en supposant que personne n'est né le 29 février...) ?
   Application numérique pour $n \in \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70\}$. À partir de quelle valeur de n cet événement est-il plus probable que son contraire ?

Solution de 17 : Problème des anniversaires et des coïncidences

1. $\Omega = [\![1, M]\!]^n$, $A = \mathscr{A}_n([\![1, M]\!])$, $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_M^n}{M^n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \dfrac{k}{M}\right)}$
2. $M = 365$, $B = \overline{A}$, $\boxed{\mathbb{P}(B) = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}}$. Pour les applications numériques à la calculatrice, utiliser plutôt la produit ci-dessus.

n	10	20	30	40	50	60	70
$\mathbb{P}(B)(\%)$	11	41	71	89	97	99,4	99,9

Pour $n = 22$, $\mathbb{P}(B) \approx 47{,}5\,\%$ et pour $\boxed{n = 23,}$ $\mathbb{P}(B) \approx 50{,}7\,\%$.

---

18 Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, à tour de rôle, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur (qui tire le premier) a une probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible, le second une probabilité $p_2 > 0$. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier tireur gagne puis celle que le second gagne.
2. En déduire qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Retrouver le résultat en utilisant une continuité monotone de la probabilité, en introduisant l'événement A_n : « Le jeu ne s'est pas arrêté au bout de n tirs de chaque joueur. »
4. On suppose que $p_2 = \dfrac{3}{2} p_1$. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Solution de 18 :

1. Soit G_1 et G_2 de probabilités g_1 et g_2 les événements correspondant à la victoire du 1er et du 2e tireur respectivement.
   Soit G_1' et G_2' les événements correspondant au fait que le 1[er] et du 2[e] tireur touche la cible au premier tir, respectivement.
   Alors
   $$G_1 = G_1' \sqcup \left(G_1 \cap \overline{G_1'} \cap \overline{G_2'}\right)$$
   car le premier joueur gagne parce qu'il a touché la cible au premier tir, ou (exclusif) alors que les deux joueurs ont raté la cible. La clé est que dans ce dernier cas, on se retrouve dans une situation analogue à celle de départ.

$$g_1=\mathbb{P}\left(G_1'\right)+\mathbb{P}\left(G_1\cap\overline{G_1'}\cap\overline{G_2'}\right)=\mathbb{P}\left(G_1^1\right)+\mathbb{P}\left(\overline{G_1'}\cap\overline{G_2'}\right)\underbrace{\mathbb{P}\left(G_1\mid\overline{G_1'}\cap\overline{G_2'}\right)}_{=\mathbb{P}(G_1)}=p_1+(1-p_1)(1-p_2)g_1,$$

les tirs des deux joueurs étant indépendants. D'où $\boxed{g_1=\dfrac{p_1}{p_1+p_2-p_1p_2}.}$

Pour g_2 le raisonnement n'est pas tout à fait symétrique, car il faut que le premier joueur ait raté sa cible une première fois pour que le deuxième soit dans une situation analogue.

On a donc $\boxed{g_2=(1-p_1)\dfrac{p_2}{p_1+p_2-p_1p_2}}$ qui donne $g_1+g_2=1$: $\boxed{\text{le jeu s'arrête presque sûrement.}}$

2. $\mathbb{P}(A_n)=(1-p_1)^n(1-p_2)^n$, (A_n) suite décroissante avec $A=\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n$: « le jeu ne s'arrête pas » donc, en passant à la limite, par continuité décroissante, $\boxed{\mathbb{P}(A)=0.}$
3. On trouve $\boxed{p_1=\dfrac{1}{3}\text{ et }p_2=\dfrac{1}{2}}$ en réinjectant $p_2=\dfrac{3}{2}p_1$ dans $g_1=g_2$.

---

19 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i^{e} tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E_n l'événement « il n'y a aucune rencontre » et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i^{e} tirage ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Démontrer, en utilisant librement la formule de Poincaré (crible) que $\mathbb{P}(E_n)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$.

Applications :

- *Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?*
- *Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?*
- *Les étudiants de MPI décident de se faire des cadeaux pour Noël. Ils mettent tous un papier portant leur nom dans la poubelle de la salle R005 puis tirent successivement un papier chacun portant le nom de personne à qui ils doivent faire un cadeau. Quelle est la probabilité que personne ne doivent se faire soi-même un cadeau ?*
- *Dans un club de Bridge, n messieurs laissent leurs n cannes (toutes distinctes) au vestiaire. En repartant, ils reprennent au hasard une canne. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne reprenne sa propre canne ?*
- *Quelle est la proportion de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe (on parle de **dérangement**) ?*

Solution de 19 : Problème des rencontres

1. $\boxed{\Omega=\mathfrak{S}_n.}$
2. $\overline{E}_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n)}=1-\mathbb{P}\left(\overline{E}\right)=1-\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1}\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\|I|=k}}\frac{(n-k)!}{n!}\right)=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}=\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

Probabilités conditionnelles

20

Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec une probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0<p<1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres. On notre x_0 le bit initial. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux, et p_n la probabilité que $x_n=x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n pour $n \geqslant 1$.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

Solution de 20 :

Chaîne de Markov

1. Proba totales : $\boxed{p_n} = p_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = \boxed{(2p-1)p_{n-1} + 1 - p}$.
2. $\boxed{p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n}$.
3. $\boxed{\frac{1}{2}}$.

21

Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- $2\ \%$ des personnes contrôlées sont en été d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété ;

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif.
   Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Même question si le résultat est négatif.
3. Quel est la probabilité que le résultat soit faux ?

Solution de 21 :

1. Bayes $(\mathbb{P}(E \mid T))$: $49{,}2\ \%$.
2. Bayes $(\mathbb{P}(E \mid \overline{T}))$: $0{,}1\ \%$.
3. $F = (T \cap \overline{E}) \sqcup (\overline{E} \cap T)$: $2{,}1\ \%$.

22

Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches.

On tire deux par deux sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

Solution de 22 :

On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui soit tel qu'à chaque étape les tirages soient uniformes.
E_i : « au i^{e} tirage, on obtient une boule de chaque couleur ».
On va utiliser la formule des probabilités composées.

$\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{n^2}{\binom{2n}{2}}$ et $\mathbb{P}\left(E_{i+1} \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{i} E_j\right) = \dfrac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)^2}{\binom{2(n-i)}{2}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(n-i)}{(2n-2i-1)} = \frac{n!}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Ou alors, vu le résultat obtenu : on distingue toutes les boules tirées successivement et on s'intéresse seulement aux numéros des boules rouges. $\Omega = \mathscr{P}_n([\![1, 2n]\!])$ avec probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{2n}{n}$ et si A est l'événement les couleurs sont alternées, pour chaque couple de tirage successif $(i, i+1)$ on a deux emplacements possibles pour la boule rouge donc $|A| = \left|\prod_{i=1}^{n} \{i, i+1\}\right| = 2^n$.

---

23 Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.
On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.
Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^{e} boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r, b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^{e} tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall\, n \geqslant 2, \quad p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\dfrac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
   On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^e et n^e tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

Solution de 23 : Urne de Pólya

Indications :

1. Bayes : $\dfrac{r+c}{r+c+b}$.
2. Proba totales $(R_1, \overline{R}_1)$.
3. Récurrence.
4.
5. $\mathbb{P}(R_m \cap B_n) = \dfrac{br}{(r+b)(r+b+c)}$.

Corrigé : 1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$

(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r+c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b+c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \dfrac{r}{r+b+c}$.

Finalement, $\mathbb{P}(R_1|R_2) = \dfrac{\dfrac{r+c}{r+b+c} \cdot \dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r+c}{r+b+c} \cdot \dfrac{r}{r+b} + \dfrac{r}{r+b+c} \cdot \dfrac{b}{r+b}} = \dfrac{r+c}{r+c+b}$.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{r+c}{r+b+c}.}$

---

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r,b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{r}{r+b}$.
De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^e tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n-1^e$ tirage à partir d'une urne contenant $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r+c,b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r,b+c)$.

Finalement, $\boxed{p_n(r,b) = \dfrac{r}{r+b}p_{n-1}(r+c,b) + \dfrac{b}{r+b}p_{n-1}(r,b+c).}$

---

3. Par récurrence sur n, $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$ et si pour un $n \geqslant 2$, pour tous r et b, $p_{n-1}(r,b) = \dfrac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r,b) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence. Donc $\boxed{\text{pour tout } n,\ \mathbb{P}(R_n) = \dfrac{r}{r+b}.}$

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

---

4. De la même manière, si $n > m \geqslant 2$, on a $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1)$, avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r,b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1) = p_{m-1,n-1}(r+c,b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1) = p_{m-1,n-1}(r,b+c)$. Donc

$$p_{m,n}(r,b) = \frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c).$$

On montre par récurrence sur $m \geqslant 1$ que pour tous r et b et tout $n > m$,

$$\boxed{p_{m,n}(r,b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}.}$$

Si $m=1$, si $n>1$, $p_{1,n}(r,b)=\mathbb{P}(R_1\cap R_n)=\mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1)=p_n(r+c,b)\dfrac{r}{r+b}=\dfrac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n>m$, alors $n-1>m-1$ et

$$\begin{aligned}p_{m,n}(r,b)&=\frac{r}{r+b}p_{m-1,n-1}(r+c,b)+\frac{b}{r+b}p_{m-1,n-1}(r,b+c)\\&=\frac{r}{r+b}\cdot\frac{(r+c)(r+2c)}{(r+b+c)(r+b+2c)}+\frac{b}{r+b}\cdot\frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)}\\&=\frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}\end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence.
Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n et m.
Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n|R_m)$ ne dépendant ni de n, ni de m.

5. Comme (R_n,B_n) est un système complet d'événements,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_m\cap B_n)}=\mathbb{P}(R_m)-\mathbb{P}(R_m\cap R_n)=\frac{r}{r+b}-\frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}=\boxed{\frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}}.$$

Même remarque.

24

Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité,
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties de suite.

1. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

Solution de 24 :

1. Soit N la variable aléatoire du nombre de partie jouées. Alors $\mathbb{P}(N\geqslant n+1 \mid N\geqslant n)=\dfrac{1}{2}$.

   Avec les probas composées, $\mathbb{P}(N\geqslant n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$.

   Par continuité décroissante, $A=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(N\geqslant n)$ événement « on ne s'arrête pas », $\boxed{\mathbb{P}(A)=0}$ en passant à la limite.

2. G_A, G_B, G_C les événements des gains de A, B, C.

   L'événement « le jeu s'arrête au bout de n parties » : $(N=n)=(N\geqslant n)\setminus(N\geqslant n+1)$ est de probabilité $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$: comme le jeu s'arrête, on n'a plus le choix pour le dernier gagnant, il doit être égal à l'avant-dernier.
   A_1 « A gagne la première partie ». On a alors un jeu en A, C, B, A, C, B, ..., A, C, B, A, A : $3k+2$ parties jouées.

$$\mathbb{P}(G_A\mid A_1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(G_A\mid N=3k+2)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-1/8}=\frac{4}{7}.$$

   Puis, avec un jeu en B, C, A, B, C, A, ..., B, C, A, A : $3k+1$ parties jouées.

$$\mathbb{P}\left(G_A\mid \overline{A_1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(G_A\mid N=3k+1)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\frac{1}{8}\frac{1}{1-1/8}=\frac{1}{7}.$$

   Donc $\boxed{\mathbb{P}(G_A)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{5}{14}.}$

   Puis $\boxed{\mathbb{P}(G_B)=\mathbb{P}(G_A)\text{ et }\mathbb{P}(G_C)=1-\mathbb{P}(G_A)-\mathbb{P}(G_B).}$

25 Fabriquer une pièce équilibrée

On dispose d'une pièce dont on en sait pas si elle est équilibrée ou non.
Proposer un protocole permettant, en l'utilisant, de simuler une pièce équilibrée.

Solution de 25 : Fabriquer une pièce équilibrée

C'est simple (mais astucieux).
(*) On lance deux fois la pièce
(**) Si on tombe sur PF, on renvoie pile, si on tombe sur FP on renvoie face.
(***) Sinon (PP ou FF) on recommence en (*)
Ça donne bien une pièce équilibrée.

Indépendance

26 Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k)\neq 1$.

Posons $B_n=\bigcup_{k=0}^{n}A_k$, $B=\bigcup_{k=0}^{+\infty}A_k$ et $u_n=\mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\mathbb{P}(B)$.
2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $\mathbb{P}(B)<1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
4. Soit $I=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\right)$. Démontrer que $\mathbb{P}(I)=0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B)<1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

   Donner une signification de la réalisation de I.

Solution de 26 : Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel-Cantelli

On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k)\neq 1$.

1. La suite $(B_n)_n$ étant croissante pour l'inclusion, par propriété de continuité croissante,

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}B_n\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=\mathbb{P}(B).}$$

2. Soit $\mathbb{P}(A_n)\not\to 0$ et alors $\ln(1-\mathbb{P}(A_n))\not\to 0$ et les deux séries divergent grossièrement, soit $\mathbb{P}(A_n)\to 0$ et $\ln(1-\mathbb{P}(A_n))\sim\mathbb{P}(A_n)\geqslant 0$ donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\text{les deux séries ont même nature.}}$

   C'est donc toujours le cas.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. En utilisant l'indépendance des A_n,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\ln(1-\mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right)=\ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}\overline{A_k}\right)\right)\\ &=\ln(1-\mathbb{P}(B_n))\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}\ln(1-\mathbb{P}(B)) & \text{si } \mathbb{P}(B)<1\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

   Avec la question précédente, on a bien $\boxed{\mathbb{P}(B)<1 \text{ si et seulement si } \sum \mathbb{P}(A_n) \text{ converge.}}$

4. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $C_n=\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k$. Alors $(C_n)_n$ est décroissante, donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(C_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathbb{P}(I)$.

   Posons, pour $n,m\in\mathbb{N}$, $C_n^m=\bigcup_{k=n}^{m}A_k$. Par continuité croissante, $\mathbb{P}\left(C_n^m\right)\xrightarrow[m\to+\infty]{}\mathbb{P}(C_n)$.

   Puis, comme dans la question précédente,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\ln(1-\mathbb{P}(A_k)) &= \ln\left(\prod_{k=n}^{m}\mathbb{P}\left(\overline{A_k}\right)\right)=\ln\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m}\overline{A_k}\right)\right)\\ &=\ln\left(1-\mathbb{P}\left(C_n^m\right)\right)\xrightarrow[m\to+\infty]{}\begin{cases}\ln(1-\mathbb{P}(C_n)) & \text{si } \mathbb{P}(C_n)<1\\ -\infty & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

   - Si $\mathbb{P}(B)<1$, alors par croissance, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(C_n)<1$ donc $\sum_{k\geqslant n}\ln(1-\mathbb{P}(A_k))$ converge et

$$1-\mathbb{P}(C_n)=\mathrm{e}^{\sum_{k=n}^{+\infty}\ln(1-\mathbb{P}(A_k))}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^0=1$$

     comme reste d'une série convergente. On a donc $\mathbb{P}(I)=0$ par unicité de la limite.
   - Si $\mathbb{P}(B)=1$, avec les deux questions précédentes, $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ diverge, et c'est aussi le cas, pour tout $n\in\mathbb{N}$, de $\sum_{k\geqslant n}\ln(1-\mathbb{P}(A_k))$.
     Comme c'est une série à terme négatifs, $\ln(1-\mathbb{P}(C_n^m))\xrightarrow[m\to+\infty]{}-\infty$, donc $\mathbb{P}(C_n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $\mathbb{P}(I)=1$.

   On a donc bien

$$\boxed{P(I)=0 \text{ si et seulement si } \mathbb{P}(B)<1, \text{ et } \mathbb{P}(I)=1 \text{ lorsque ce n'est pas le cas.}}$$

   I est réalisé se traduit par la réalisation d'une infinité de A_n.

27 Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

Soit $s \in]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « n est multiple de m ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ sont indépendants.
4. En déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
5. **Application de cette formule**

   On se propose en application de prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
   Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Conclure.

Solution de 27 : Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

1. On peut définir une probabilité à condition que la famille $\left(\dfrac{\lambda}{n^s}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit sommable de somme 1. C'est le cas lorsque $\boxed{s>1 \text{ et } \lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}}$.

2. Il fallait plutôt lire « n est un multiple de m ».
$$\boxed{\mathbb{P}(A_m) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(mk)^s} = \frac{1}{m^s}.}$$

3. Si $p_1, \ldots, p_n$ sont premiers, $A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_n} = A_{p_1\cdots p_n}$.
   Avec la question précédente,
$$\mathbb{P}\left(A_{p_1} \cap \cdots \cap A_{p_n}\right) = \mathbb{P}\left(A_{p_1\cdots p_n}\right) = \frac{1}{(p_1\cdots p_n)^s} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_{p_k}\right).$$
   donc $\boxed{\text{les } A_p \text{ pour } p \in \mathscr{P} \text{ sont indépendants.}}$

4. On souhaite montrer que $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$.
   Or $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{P}\left(\overline{A_p}\right)$ qui est un produit infini.
   Mais les $\overline{A_p}$ sont indépendants, donc si on considère les n premiers nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$,
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A_{p_k}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{A_p}\right)$$
   par continuité décroissante.
   Or $n \in \displaystyle\bigcap_{p\in\mathscr{P}} \overline{A_p} \iff n$ n'a aucun diviseur premier $\iff n = 1$.
   Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \mathbb{P}(\{1\}) = \lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ et, finalement, $\boxed{\displaystyle\prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}.}$

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln u_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$ avec $\dfrac{1}{p_n} \to 0$ donc $-\ln\left(1-\dfrac{1}{p_n}\right) \sim \dfrac{1}{p_n}$ donc $(\ln u_n)_n$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Donc, par continuité de l'exponentielle, $u_n \longrightarrow \ell$.
   Puis, pour tout $s > 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - \dfrac{1}{p_n} \leqslant 1 - \dfrac{1}{p_n^s}$, donc $u_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ et lorsque $n \to +\infty$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
   Or il est classique que $\zeta(s) \xrightarrow[s\to 1^-]{} +\infty$. En effet, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir[1] que $\zeta(s) \underset{s\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.
   Autre rédaction possible : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant \zeta(s) \leqslant \ell$ donc lorsque $s \to 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ell$, ce qui est contradictoire.

   Finalement, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n} \text{ diverge.}}$

1. Le sujet CCINP 2021 le faisait remontrer quelques questions avant

28 Temps d'attente

On lance une pièce avec la probabilité $p \in]0,1]$ de faire pile. On note A_n l'événement « On obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n^e lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

1. Déterminer a_1, a_2, a_3.
2. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et interpréter le résultat obtenu.

Solution de 28 : Temps d'attente

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement P_n = «On obtient pile lors du n^e lancer» Les événements P_n sont indépendants et chacun de probabilité p.

1. Immédiatement, $A_1 = \varnothing$ et donc $\boxed{a_1 = 0.}$

   Aussi, $A_2 = P_1 \cap P_2$. Par indépendance des lancers, $\boxed{a_2 = \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2) = p^2.}$ Enfin, $A_3 = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$ ce qui donne $\boxed{a_3 = (1-p)p^2.}$

2. Considérons les résultats des deux premiers lancers :

$$P_1P_2, P_1F_2, F_1P_2 \text{ et } F_1F_2$$

   On forme un le système complet d'événements en regroupant

$$P_1P_2, P_1F_2 \text{ et } F_1 = F_1P_2 \cup F_1F_2.$$

   Par translation du problème,

$$\mathbb{P}(A_{n+2} \mid F_1) = \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_{n+2} \mid P_1F_2) = \mathbb{P}(A_n)$$

   tandis que

$$\mathbb{P}(A_{n+2} \mid P_1P_2) = 0.$$

   Par la formule des probabilités totales,

$$a_{n+2} = 0 \times p^2 + a_n \times p(1-p) + a_{n+1}(1-p)$$

   soit encore

$$\boxed{a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n.}$$

3. Les événements A_n étant deux à deux incompatibles,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right)$$

   Notons S cette valeur (élément de $[0,1]$). En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$ la relation de la question précédente, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} = (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2} + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

   ce qui donne par translation d'indice

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n = (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} a_n + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

   On en déduit

$$S - (a_1 + a_2) = (1-p)(S - a_1) + p(1-p)S.$$

   On en tire $\boxed{S = 1 \text{ : il est quasi-certain que deux piles consécutifs apparaissent.}}$

29 Marche aléatoire (écrit E3A)

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.

À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.

À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).

On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.

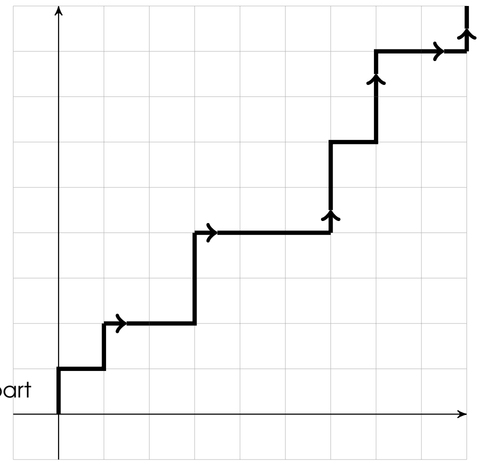
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :

- $x_0 = y_0 = 0$

- Pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$, $(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1}+1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1}+1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.

Empire State Building →



Le trajet est (N, E, N, E, E, N, N, E, E, E, N, N, E, N, N, E, E, N)

1. (a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$.
   (c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a,b) avec $(a,b) \neq (0,0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement « Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$. » On pourra noter N_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord » et E_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est. »
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.
   (b) Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ pour $n \geqslant 2$.
   (c) Soit $n \geqslant 2$. Justifier brièvement que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$. En déduire le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

   Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

   (d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n,n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:
   $$\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$
   puis que
   $$\mathbb{P}(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$
3. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \mathbb{P}(U_n)$.
   (a) Déterminer le réel a tel que :
   $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :
   $$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

(c) En calculant de deux manières différentes la somme $\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k>0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

(d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Solution de 29 : Marche aléatoire (écrit E3A)

1. (a) D'après l'indication de l'énoncé, le nombre cherché est directement $\boxed{2^\ell}$.

   (b) Il suffit de placer, par exemple, les deux N parmi les cinq étapes : il y a $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = \boxed{10 \text{ trajets possibles.}}$

   (c) De même, $\boxed{\text{le nombre de chemins reliant l'origine à } M(a,b) \text{ est } \binom{a+b}{b} = \binom{a+b}{a}.}$

2. (a) Pour que le chemin traverse Δ pour la première fois à l'étape 2, les seuls chemins possibles sont « N, E » et « E, N », qui amènent en $(1,1)$ (remarquons que si on est en (a,b), on y est au bout de $a+b$ étapes car on ne fait que monter ou aller à droite).
   Le sujet semble sous-entendre que le choix du piéton à chaque croisement est uniforme.

   On calcule alors $\boxed{\mathbb{P}(U_1) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}.}$

   (b) Par aller du point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$, il faut aller $n-1$ fois au Nord et $n-1$ fois à l'Est.

   Le nombre de chemin correspond au nombre de façon de placer les $n-1$ Nord parmi les $2n-2$ déplacement soit $\boxed{\left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1}.}$

   (c) On remarque que chaque chemin reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ coupe nécessairement la droite $\Delta : y = x$. Soit (a,a) le point d'abscisse minimale sur ce chemin.
   Alors en prenant le symétrique de la partie du chemin entre $(1,0)$ et (a,a) par rapport à Δ et en gardant la partie du chemin entre (a,a) et $(n-1,n)$ (à voir sur un dessin !), on obtient un chemin entre $(0,1)$ et $(n-1,n)$ coupant Δ, pour la première fois, en (a,a).
   On obtient ainsi une bijection entre les chemins reliant $(1,0)$ à $(n-1,n)$ et les chemins reliant $(0,1)$ à $(n-1,n)$ coupant Δ, $\boxed{\text{dont les nombres sont égaux.}}$
   Ainsi, le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant Δ est $\boxed{\left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-2}}$ sur le même principe que la question précédente.

   (d) Vu la question précédente, on a immédiatement que

$$\boxed{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| = \left|C_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right| - \left|C_{(1,0)}^{(n-1,n)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$$

   (e) Par symétrie (par rapport à Δ), on a directement aussi $\boxed{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right| = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}.}$

   (f) Si le chemin passe pour la première fois par Δ à l'étape $2n$, c'est forcément au point de coordonnées (n,n) car le nombre d'étapes est toujours donné par la somme des coordonnées du point.
   Il y a alors deux cas disjoints possible :
   - Soit on a commencé par E et il faut relier le point $(1,0)$ au point $(n,n-1)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un N (événement A).
   - Soit on a commencé par N et il faut relier le point $(0,1)$ au point $(n-1,n)$ sans croiser Δ et nécessairement terminer par un E (événement B).

   La formule des probabilités totales s'applique au système complet d'événements (N_1, E_1) et donne (avec P probabilité uniforme sur les chemins) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_n) &= \mathbb{P}(U_n|N_1)\mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(U_n|E_1)\mathbb{P}(E_1) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left|T_{(1,0)}^{(n,n-1)}\right|}{2^{2n-1}} + \frac{\left|T_{(0,1)}^{(n-1,n)}\right|}{2^{2n-1}}\right) \qquad \text{Après l'étape 1, il reste } 2n-1 \text{ étapes.} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-2}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{(2n-2)!}{(n-1)!^2} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!}\right) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}n!(n-1)!}(n-(n-1))
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(U_n)=\frac{1}{2^{2n-1}}\times\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$ Puis

$$\mathbb{P}(U_n)=\frac{2\cdot n\cdot(2n-2)!}{(2^n\cdot n!)^2}=\frac{(2n)!}{(2n-1)(2\times4\times\cdots\times2n)^2}=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{(2n-1)(2\times4\times\cdots\times2n)}$$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(U_n)=\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-3)}{2\times4\times\ldots\times2n}.}$

3. (a) On calcule $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2n-1}{2n+2}$ donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)=\ln\left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et enfin $\boxed{\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=-\frac{3}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$

(b) La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ étant décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, un résultat du programme corollaire à la comparaison série-intégrale nous dit que $w_n=\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente (avec $n\geqslant 2$). Appelons ℓ sa somme.

On a alors $\sum_{n=2}^{N}w_n=\int_1^N\frac{\mathrm{d}t}{t}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}=\ln N-\ln 1-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+1\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$

Ainsi, en notant $\gamma=1-\ell$, on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+\underset{N\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).}$

(c) D'une part, en tant que somme télescopique, on a déjà

$$\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\ln(v_N)-\ln(v_1)=\ln v_N-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln v_N+\ln 2$$

d'après la question 3.a.

D'autre part, avec la question 4.a, en notant $t_n=\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)+\frac{3}{2n}$, on a $|t_n|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison de séries à termes généraux positifs, la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ étant convergente, $\sum t_n$ est absolument convergente donc convergente vers un réel S et $\sum_{n=1}^{N-1}t_n=S+\mathrm{o}(1)$.

Alors $\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}+S+\mathrm{o}(1)=-\frac{3}{2}\ln(N-1)-\frac{3}{2}\gamma+S+\mathrm{o}(1)$ d'où finalement $\ln v_N=-\frac{3}{2}\ln(N-1)+a_n$ où $a_n\to-\frac{3}{2}\gamma+S-\ln 2$.

Finalement, $v_N=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\ln(N-1)+a_n}=\frac{\mathrm{e}^{a_n}}{N^{\frac{3}{2}}}$ et $\boxed{v_N\sim\frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}}$ où $k=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}\gamma+S-\ln 2}>0$, par continuité de l'exponentielle.

(d) Soit $n\geqslant 2$. Comme $v_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+2}v_n$, $(2n+2)v_{n+1}=(2n-1)v_n$ et on a bien

$$\boxed{v_{n+1}=(2n-1)v_n-(2n+1)v_{n+1}.}$$

Alors, la série $\sum v_n$ étant effectivement convergente par comparaison à une série de Riemann vu la question précédente, mais aussi par télescopage vu ce qui précède, la question précédente permettant de voir que $(2n-1)v_n\sim\frac{2k}{\sqrt{n}}$ donc $(2n-1)v_n\to 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(U_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=v_1+v_2+\sum_{n=2}^{+\infty}v_{n+1}=v_1+v_2+\sum_{n=2}^{+\infty}\Big((2n-1)v_n-(2(n+1)-1)v_{n+1}\Big)=v_1+v_2+3v_2=v_1+4v_2$$

Et comme $v_1=\mathbb{P}(U_1)=\frac{1}{2}$ (question 3.a) et $v_2=\mathbb{P}(U_2)=\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{8}$ (question 3.f), on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(U_n)=1.}$

Comme les U_n sont deux à deux disjoints, $P\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}U_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(U_n)=1$.

On en déduit qu' $\boxed{\text{il est presque sûr que notre piéton passe par la droite } \Delta.}$

Variables aléatoires

30 Soit X,Y,Z,T quatre variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. On suppose que X,Y,Z,T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & T\end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

Solution de 30 :

1. (a) $\mathbb{E}(\det(M))=\mathbb{E}\left(\frac{1}{2}(XT-YZ)\right)=\frac{\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(T)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)}{2}=0$ par linéarité et indépendance.
   (b) On vérifie que $\det(M)(\Omega)=\{0,-1,1\}$ et la définition de l'espérance (nulle) donne alors le résultat.
   Ou alors on vérifie que $\mathbb{P}(\det M=1)=\mathbb{P}(XT=1,ZY=-1)$ et $\mathbb{P}(\det M=1)=\mathbb{P}(XT=-1,ZY=1)$ et les probabilités sont égales pour des raisons de symétrie.
   Ou alors on voit que $-\det(M)$ est la variable aléatoire obtenue en changeant X en $-X$ et Z en $-Z$ ce qui ne change pas la loi car $-X,Y,-Z,T$ sont indépendantes et de même loi uniforme que X,Y,Z,T.
   (c) Vu la première question, $\mathbb{V}(\det(M))=\mathbb{E}\left(\det(M)^2\right)=\frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(XYZT))=\frac{1}{2}(1-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(T))=\frac{1}{2}$ par indépendance.
2. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M\in\mathscr{O}(2))&=\mathbb{P}\left(X^2+Z^2=Y^2+T^2=1,XY+ZT=0\right)=\mathbb{P}(XY+ZT=0)\\&=\mathbb{P}(XY=1,ZT=-1)+\mathbb{P}(XY=-1,ZT=1)\\&=2\mathbb{P}(XY=1,ZT=-1) && \text{par symétrie}\\&=2\mathbb{P}(XY=1)\mathbb{P}(ZT=-1) && \text{par lemme des coalition}\end{aligned}$$

   avec $\mathbb{P}(XY=1)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(ZT=-1)=\frac{1}{2}$ par symétrie.

   Finalement, $\mathbb{P}(M\in\mathscr{O}(2))=\frac{1}{2}$.

   (b) $\mathbb{P}(M\in\mathscr{GL}_2(\mathbb{R}))=\mathbb{P}(\det M=1)+\mathbb{P}(\det M=-1)=2\mathbb{P}(\det M=1)=2\mathbb{P}(XT=-1,ZY=1)=\frac{1}{2}$ par symétrie vu le calcul précédent.
   (c) $\chi_M(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}(M)\lambda+\det M$.

   1^er^ cas $XT=1$ et $YZ=1$: $\chi_M(\lambda)=\lambda^2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda$ scindé simple donc M est diagonalisable.

   2^e^ cas $XT=1$ et $YZ=-1$: $\chi_M(\lambda)=\lambda^2\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda+1$ à discriminant <0 : M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

   3^e^ cas $XT=-1$ et $YZ=1$: $\chi_M(\lambda)=\lambda^2-1$ scindé simple donc M est diagonalisable.

   4^e^ cas $XT=-1$ et $YZ=-1$: $\chi_M(\lambda)=\lambda^2$ donc M n'est pas diagonalisable car non nulle.

   Finalement, la probabilité que M soit diagonalisable est $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et $\frac{3}{4}$ dans $\mathbb{C}$.

   Autre raisonnement possible :
   - Si $Y=Z$, la matrice symétrique réelle est diagonalisable cela arrive à probabilité $P(YZ=1)=1/2$.
   - Sinon, $(YZ=-1)$ et le polynôme caractéristique de $\sqrt{2}M$ est $\lambda^2-(X+T)\lambda+(XT+1)$ et on sépare le cas $XT=1$ (diagonalisable seulement dans $\mathbb{C}$) ou $XT=-1$ (non diagonalisable) ...

   D'où la probabilité d'être diagonalisable dans $\mathbb{R}$: $\frac{1}{2}$, et la probabilité de l'être dans $\mathbb{C}$: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

31 Taux de panne – Oral CCINP

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X \geqslant n) > 0.$$

On définit le taux de panne de X par la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ avec

$$x_n = \mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n).$$

1. Montrer que si l'on pose $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une loi de probabilité.
   Déterminer le taux de panne de Y.
2. Dans le cas général, établir
$$\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$$
3. En déduire une expression de $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k valable pour tout $n \geqslant 1$.
4. Déterminer les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant.

Solution de 31 : Taux de panne – Oral CCINP

1. La famille $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de réels positifs de somme 1 puisque
$$\sum_{n\in N^*} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1} = 1$$
   La famille $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une distribution de probabilités : elle détermine une loi de probabilité. On note $(y_n)_{n\geqslant 1}$ le taux de panne de Y. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(Y \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$$
   et donc
$$\boxed{y_n = \mathbb{P}(Y = n \mid Y \geqslant n) = \frac{\mathbb{P}(Y = n \cap Y \geqslant n)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n)}{\mathbb{P}(Y \geqslant n)} = \frac{1}{n+1}.}$$
2. Par récurrence, on établit la formule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et non seulement $n \geqslant 2$).
   Pour $n = 1$, la formule est valable puisqu'un produit vide vaut 1 . Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 1$. Par la formule des probabilités composées,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant n+1) &= \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X = n)\\ &= \mathbb{P}(X \geqslant n) - \mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n)\mathbb{P}(X \geqslant n)\\ &= \mathbb{P}(X \geqslant n)(1 - x_n) = \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k).\end{aligned}$$
   La récurrence est établie.
3. Pour tout $n \geqslant 1$,
$$\boxed{\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = n \mid X \geqslant n)\mathbb{P}(X \geqslant n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k).}$$
4. Une variable aléatoire à taux de panne constant p vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$$
   Puisque p est une probabilité conditionnelle, on a $p \in [0, 1]$. Nécessairement $p \neq 0$ et $p \neq 1$ pour que X vérifie la condition énoncée initialement. La variable X suit donc une loi géométrique de paramètre p.
   Inversement, supposons que X suive une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On a $\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-p)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ puis
$$x_n = \frac{\mathbb{P}(X = n)}{\mathbb{P}(X \geqslant n)} = p$$
   Le taux de panne de X est constant.
   Les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant sont donc les variables aléatoires suivant une loi géométrique, dont le paramètre correspond au taux de panne.

32 Loi de Pascal

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0<n<k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face ; on note T_n le numéro du n-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T_n (loi de Pascal). Combien vaut l'espérance de T_n ?

   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi de Pascal », donne le temps d'attente de la n^e occurrence de cet événement.

Solution de 32 : Loi de Pascal

1. S_2 est a valeurs dans $[\![2,+\infty]\!]$, et pour tout $k\in[\![2,+\infty]\!]$, X_1 et X_2 étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(S_2=k)=\mathbb{P}(X_1+X_2=k)=\sum_{j=1}^{k-1}\mathbb{P}(X_1=j)\mathbb{P}(X_2=k-j)=\sum_{j=1}^{k-1}pq^{j-1}pq^{k-j-1}=(k-1)p^2q^{k-2}$$

   .

2. Pour $x\neq 0$,

$$P(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant j\leqslant k-1}\binom{j-1}{n-1}x^n=\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{n=1}^{j}\binom{j-1}{n-1}x^n=\sum_{j=1}^{k-1}x(x+1)^{j-1}=x\frac{1-(x+1)^{k-1}}{1-(x+1)}=(x+1)^{k-1}-1=\sum_{n=1}^{k-1}\binom{k-1}{n}x^n$$

   Puis deux polynômes coïncidant sur une infinité de valeurs sont égaux, par unicité des cœfficient, on obtient la formule demandée.
   Remarque : c'est une technique de type série génératrice, mais avec des sommes finies !
3. On a $\mathbb{P}(S_1=k)=\mathbb{P}(X_1=k)=pq^{k-1}$ et $\mathbb{P}(S_2=k)=(k-1)p^2q^{k-2}$... On voit un pattern, mais quid du cœfficient ?
   On peut se rassurer avec, pour $k\geqslant 3$, avec $S_2\perp X_3$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_3=k)=\mathbb{P}(S_2+X_3=k)=\sum_{j=2}^{k-1}\mathbb{P}(S_2=j)\mathbb{P}(X_3=k-j)=\sum_{j=2}^{k-1}(j-1)p^2q^{j-2}pq^{k-j-1}=\frac{(k-1)(k-2)}{2}p^3q^{k-3}$$

   .
   Cette fois c'est plus clair et on conjecture, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $\forall k\in[\![n,+\infty[\![$, $\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}$ » et le calcul précédent nous donne la marche à suivre pour l'hérédité.
   La récurrence est déjà initialisée trois fois et si on fixe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vrai, alors, $\forall k\in[\![n+1,+\infty[\![$, , avec $S_n\perp X_{n+1}$ (lemme des coalitions)

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=k)=\mathbb{P}(S_n+X_{n+1}=k)=\sum_{j=n}^{k-1}\mathbb{P}(S_n=j)\mathbb{P}(X_{n+1}=k-j)=\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}p^nq^{j-n}pq^{k-j-1}=\binom{k-1}{n}2p^{n+1}q^{k-(n+1)}$$

   avec la question précédente.
4. T_n est à valeurs dans $[\![n,+\infty]\!]$ et si $k\in[\![n,+\infty]\!]$, avoir $T_n=k$, c'est avoir tiré pile au k^e tirage, et parmi les $k-1$ premiers tirages avoir tiré exactement $n-1$ fois pile et et $k-n$ fois face.
   En notant $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de vaiid de loi $\mathscr{B}(p)$ des résultats à chaque tirage,

$$\mathbb{P}(T_n=k)=\sum_{\substack{x_1,\dots,x_{k-1}\in\{0,1\}\\ \text{dont } n-1 \text{ valent } 1}}\mathbb{P}(X_1=x_1)\cdots\mathbb{P}(X_{k-1}=x_{k-1})\mathbb{P}(X_n=1)=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}$$

   Et vu le calcul des questions précédentes, on peut déterminer l'espérance (qui ne dépend que de la loi) en utilisant S_n :

$$\mathbb{E}(T_n)=\mathbb{E}(S_n)=n\mathbb{E}(X_1)=\frac{n}{p}.$$

33 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images $(2 \leqslant k \leqslant n)$. On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution de 33 : Le problème du collectionneur

1. Les achats de pochettes sont supposés indépendants, et un achat est un succès avec la probabilité $\dfrac{n-k+1}{n}$.

   Donc $\boxed{L_k \text{ suit une loi géométrique } \mathscr{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right).}$

2. Et donc l'espérance est
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$$
   Or
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}$$
   $\boxed{\text{Un équivalent est donc } n \ln n.}$

3. Les L_k sont considérés deux à deux indépendants. On a
$$\boxed{\mathbb{V}(T_n)} = \mathbb{V}(L_1 + \cdots + L_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = \boxed{n^2 \sigma_n - n H_n}$$
   où (σ_n) converge vers $\pi^2/6$. $\boxed{\text{Un équivalent est donc } \dfrac{\pi^2}{6} n^2.}$

34 L'espérance via une loi conditionnelle et formule de l'espérance totale

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \mathbb{P}(X=x) \neq 0}} \mathbb{E}(Y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)$$
où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.
2. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X \mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$
3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1, \ldots, U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n - j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Solution de 34 : L'espérance via une loi conditionnelle et formule de l'espérance totale

1. Notons $E = \{x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$. Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:
$$\mathbb{P}_{Y|(X=x)}(\{y\}) = \mathbb{P}(Y = y \mid X = x).$$
On a Y d'espérance finie donc $(y\mathbb{P}(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sommable et $\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y)$.
Sous réserve d'existence (sommabilité), $\mathbb{E}(Y \mid X = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)$.
On s'intéresse alors à la sommabilité de la famille $\big(y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x)\big)_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)}$.
Or, dans $[0, +\infty]$, par Fubini positif et la formule des probabilités totales appliqué au système quasi-complet d'événements $(X = x)_{x \in E}$,
$$\sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} |y| \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(|y| \sum_{x \in E} \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) \right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} |y| \mathbb{P}(Y = y) < +\infty$$
car Y est d'espérance finie, donc on peut refaire le même calcul, sans valeur absolue, avec le théorème de Fubini général et la formule des probabilités totales toujours
$$\sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{x \in E} \mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(Y).$$
Le théorème de Fubini (dans l'autre sens) nous dit aussi que pour tout $x \in E$, $\big(y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\big)_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable donc $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ est bien définie et que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{(x,y) \in E \times Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in E} \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) \right) \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in E} \mathbb{E}(Y \mid X = x)\mathbb{P}(X = x).$$

2. C'est le même principe en remplaçant le système quasi-complet d'événements $(X = x)_{x \in E}$ par $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3. On trouve $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{r}{k} \sum_{j=1}^{n} j^k (n - j)^{r-k}}{n^{r+1}}$ et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{r(n+1)}{2n}$.

35 Embranchement routier

On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y=k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

Solution de 35 : Embranchement routier

Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

$\mathbb{P}(X_n | Y=k) = e^{-\lambda q} \dfrac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!}$.

36 Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x\in[0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha>0$, $\mathbb{P}(|S_n - nx| > n\alpha) \leqslant \dfrac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie $\mathbb{E}\left[f\left(\dfrac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(f)(x)$.
2. (a) Soit $\varepsilon>0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(a,b)\in[0,1]^2$, $|a-b|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbb{P}(S_n=k)\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|<2\varepsilon$, puis conclure.

Solution de 36 : Théorème de Weierstrass ; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

1. (a) C'est Bienaymé-Tchebychev, comme dans la démonstration de la loi faible des grands nombres.
   (b) C'est $B_n(f)(x)$ par la formule de transfert.
2. (a) C'est une conséquence de l'uniforme continuité de f continue sur le segment $[0,1]$ (théorème de Heine).
   (b) Inégalité triangulaire et $\displaystyle\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \mathbb{P}(S_n=k) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
   (c) On rassemble sous le signe $\sum$ dans $|B_n(f)(x)-f(x)|$, puis on utilise l'inégalité triangulaire, puis on sépare suivant si $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|>\alpha$ ou non. Dans le premier cas, on utilise la question précédente et la question 1.a pour majorer par ε à partir d'un certain rang, dans le second cas, on utilise l'uniforme continuité de 2.a pour majorer par ε.
   La suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.

37 E3A 2023 MP

Soit n un entier naturel non nul.

1. **Questions de cours** : Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

   (a) Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.
   (b) Donner les spectres possibles de W.
   (c) Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.
   (d) Calculer $\det(W)$.

On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$

2. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.

   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathrm{rg}(M)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   « les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

   (a) On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.
   (b) On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.
   (c) On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = \left(a_{ij}(\omega)\right)_{[\![1,n]\!]^2}$.

   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
   (c) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.
   (e) Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
   (f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$.

Solution de 37 : E3A 2023 MP

1. Soit p une projection vectorielle d'un espace vectoriel E de dimension n et $\mathrm{rg}\, p = r \in \mathbb{N}$.
   On peut avoir $p = 0$ ou id_E .

   (a) On a $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$, $\dim\left(\mathrm{Im}\, p\right) = r$ et pour tout x dans $\mathrm{Im}\, p$ on a $p(x) = x$, dans une base adaptée à la somme directe la matrice W de p s'écrit :
   $$W = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$
   avec I_r la matrice identité d'ordre r.
   (b) $Sp(W) \subset \{0,1\}$.
   (c) On a $\mathrm{tr}(W) = \mathrm{rg}(W)$.
   (d) $\det(W) = 1$ si $p = id_E$ et $\det(W) = 0$ sinon .

2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $X_i \sim \mathscr{B}(p)$,donc $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$.

   (a) Pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, donc $T(\omega) = \mathrm{tr}(\Delta(\omega)) = X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$, par suite $T(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

(b) Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Posons $\mathscr{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k , on a $\text{Card}\,\mathscr{P}_k=\binom{n}{k}$.
L'événement $[T=k]$ contient les $\omega\in\Omega$ pour lesquels il existe une partie $I\in\mathscr{P}_k$ telle que $X_i(\omega)=1$ si $i\in I$ et $X_i(\omega)=0$ sinon . On alors

$$[T=k]=\bigcup_{I\in\mathscr{P}_k}\left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\right)\cap\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}[X_i=0]\right)\right)$$

Cette réunion est disjointe et les variables $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{I\in\mathscr{P}_k}\prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i=1)\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}\mathbb{P}(X_i=0)\\ &= \sum_{I\in\mathscr{P}_k}p^kq^{n-k}\ \ (\ q=1-p)\\ &= |\mathscr{P}_k|\\ &= \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\end{aligned}$$

T suit la loi et l'espérance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
Par suite $\mathbb{E}(T)=np$.

3. On a pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega)=\text{diag}(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ $X_i(\Omega)=\{0,1\}$, donc $M(\omega)$ est la matrice d'une projection $(M(\omega)^2=M(\omega))$, par suite $\text{tr}(M(\omega))=\text{rg}(M(\omega))$ et $R=T$.
D'où $R\sim\mathscr{B}(n,p)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

(a) Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection donc $\det(M(\omega))=1$ ou 0 et $D(\Omega)=\{0,1\}$.
(b) L'événementde $[D=1]$ contient les ω tels $M(\omega)=\Delta(\omega)=I_n$ donc

$$[D=1]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(D=1)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=1)=p^n$$

Par suite

$$\mathbb{P}(D=0)=1-\mathbb{P}(D=1)=1-p^n$$

D'où $D\sim\mathscr{B}(p^n)$ et $\mathbb{E}(D)=p^n$.

5. Soit Z l'évènement :
« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »
Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection , ses sous espaces propres possibles sont $E_0(M(\omega))=\text{Ker}\,M(\omega)$ et $E_1(M(\omega))=\text{Im}\,M(\omega)$.

(a) L'évènement V : « M ne possède qu'une seule valeur propre » est équivalent à $M=0$ ou I_n on écrit donc $V=[M=0]\cup[M=I_n]$, ces deux événements sont disjoints donc

$$\mathbb{P}(V)=\mathbb{P}(M=0)+\mathbb{P}(M=I_n)$$

Et on a

$$[M=0]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=0]\ \text{et}\ [M=I_n]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(M=0)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=0)=q^n\ \ \text{et}\ \mathbb{P}(M=I_n)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}(X_i=1)=p^n$$

D'où $\boxed{\mathbb{P}(V)=p^n+q^n}$.

(b) On suppose n impair .
Pour tout ω dans Ω , on a $\mathbb{R}^n=\text{Ker}\,M(\omega)\oplus\text{Im}\,M(\omega)$, si $\omega\in Z$ alors $\dim\text{Ker}\,M(\omega)=\dim\text{Im}\,M(\omega)$.
Forcement on a un seul sous espace propre , car sinon $n=\dim\mathbb{R}^n=2\dim\text{Im}\,M(\omega)$, contredit le fait que n est paire . Ainsi si n impair alors $Z=V$ et $\boxed{\mathbb{P}(Z)=p^n+q^n}$.
(c) $n=2r$. D'après la question 2. on a $\mathbb{P}(T=r)=\binom{2r}{r}p^rq^r$.
On a $\omega\in Z$ alors $\dim\text{Ker}\,M(\omega)=\dim\text{Im}\,M(\omega)=r$ donc $Z=[R=r]=[T=r]$.
Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(Z)=\binom{2r}{r}p^rq^r}$.

6. .

(a) Soit $\omega\in\Omega$,on a

$$A=\begin{pmatrix} X_1(\omega)\\ \vdots\\ X_n(\omega)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(\omega) & \cdots & X_n(\omega)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1(\omega)^2 & X_1(\omega)X_2(\omega)\cdots\cdots & X_1(\omega)X_n(\omega)\\ X_1(\omega)X_2(\omega) & X_2(\omega)^2\cdots\cdots & X_2(\omega)X_n(\omega)\\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots\\ X_1(\omega)X_n(\omega) & X_2(\omega)X_n(\omega)\cdots\cdots & X_n(\omega)^2\end{pmatrix}$$

pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ on a $\boxed{a_{i,j}(\omega)=X_i(\omega)X_j(\omega)}$.

(b) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $X_i(\Omega)=X_j(\Omega)=\{0,1\}$ donc $a_{i,j}(\Omega)=\{0,1\}$.
On a :
▷ $[a_{i,j}=1]=[X_i=1]\cap[X_j=1]$, X_i et X_j sont indépendantes donc :

$$\mathbb{P}(a_{i,j}=1)=\mathbb{P}(X_i=1)\mathbb{P}(X_j=1)=p^2$$

▷ $\mathbb{P}(a_{i,j}=0)=1-\mathbb{P}(a_{i,j}=1)=1-p^2$.
D'où $\boxed{a_{i,j}\sim\mathscr{B}(p^2)}$.

(c) Soit $\omega\in\Omega$, on a $\mathrm{tr}(A(\omega))=\sum_{i=1}^{n}X_i^2(\omega)$, or les $X_i(\omega)\in\{0,1\}$ donc $X_i^2(\omega)=X_i(\omega)$, d'où $\mathrm{tr}(A(\omega))=\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega)$ et $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(d) Soit $\omega\in\Omega$. Remarquons que les colonnes de $A(\omega)$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} X_1(\omega)\\ \vdots\\ X_n(\omega)\end{pmatrix}$, si ce vecteur est non nul alors $rgA(\omega)=1$ sinon $rgA(\omega)=0$. Donc la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.

(e) Soit ω dans Ω .
▷ Si $A(\omega)=0$ alors $Sp(A(\omega))=\{0\}$.
▷ Si $A(\omega)\neq 0$ alors $\mathrm{rg}(A(\omega))=1$ .Le noyau est de dimension $n-1$, on prend une base de $\mathrm{Ker}\,A$ est on la complète par un vecteur en une base de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est égale à $\mathrm{diag}(\lambda,0,\dots,0)$, cette dernière matrice est semblable à $A(\omega)$, ce qui donne $\lambda=\mathrm{tr}\,A(\omega)$ et $Sp(A(\omega))=\{0,\mathrm{tr}\,A(\omega)\}$.

(f) La variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.
Soit ω dans Ω . $\mathrm{rg}(A(\omega))=0$ est équivalent à $A(\omega)=0$ et à $X_1(\omega)=\dots=X_n(\omega)=0$, donc

$$[\mathrm{rg}(A)=0]=\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}[X_i=0]$$

l'indépendance des X_i donne

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{rg}(A)=0\big)=\prod_{i\in[\![1,n]\!]}\mathbb{P}[X_i=0]=q^n$$

Donc $\mathbb{P}\big(\mathrm{rg}(A)=1\big)=1-\mathbb{P}\big(\mathrm{rg}(A)=0\big)=1-q^n$.
La variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$ suit la loi $\mathscr{B}(1-q^n)$.

Fonctions génératrices

38 Soient $p\in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X=k)=a(k+1)p^k \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}.$$

En employant la fonction génératrice de X, déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

Solution de 38 :
On introduit la fonction génératrice de X :

$$G_X(t)=a\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(pt)^k$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

on obtient

$$G_X(t)=\frac{a}{(1-pt)^2}$$

Sachant $G_X(1)=1$, on en tire la valeur de a

$$a=(1-p)^2$$

On peut ensuite calculer espérance et variance

$$\mathrm{E}(X)=G_X'(1)=\frac{2p}{1-p} \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X)=G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2=\frac{2p}{(1-p)^2}$$

---

39 Dés pipables ?

Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

Solution de 39 : Dés pipables ?

La fonction génératrice d'une variable Y suivant une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$ est la fonction polynomiale

$$G_Y(t) = \frac{1}{12}\left(t^2+t^3+\cdots+t^{12}\right)$$

Notons G_{X_1} et G_{X_2} les fonctions génératrices de chacun des dés.

$$G_{X_1}(t) = \left(p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_6 t^6\right) \text{ et } G_{X_2}(t) = \left(q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_6 t^6\right).$$

La fonction génératrice de la somme X_1+X_2 est donnée par

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) = t^2\left(p_1+p_2 t+\cdots+p_6 t^5\right)\left(q_1+q_2 t+\cdots+q_6 t^5\right).$$

Pour que $G_Y = G_{X_1} G_{X_2}$, il faut $p_1 q_1 > 0$ et $p_6 q_6 > 0$ auquel cas les facteurs de degré 5 possèdent chacune une racine réelle non nulle. Cependant

$$G_Y(t) = \frac{1}{12} t^2 \frac{1-t^{11}}{1-t}$$

n'en possède pas !

40 Temps d'attente : loi de Pascal par les fonctions génératrices

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p>0$ de réussir et $1-p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et l'on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1. Reconnaître la loi de T_1.
2. Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$. On l'appelle loi de Pascal de paramètre (m,p).
3. Exprimer le développement en série entière de
$$\frac{1}{(1-t)^m}$$
4. Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance et sa variance.
5. Retrouver le résultat de l'exercice 32 : une somme de m vaiid de la loi géométrique de paramètre p suit une loi de Pascal de paramètre (m,p).

Solution de 40 : Temps d'attente : loi de Pascal par les fonctions génératrices

1. $\boxed{T_1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$
2. Notons $(X_n)_{n\in N^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(T_m = n)$ est la réunion correspond à l'évènement $X_1+\cdots+X_n = m$ et $X_n = 1$ soit encore $X_1+\cdots+X_{n-1} = m-1$ et $X_n = 1$. Par indépendance
$$\mathbb{P}(T_m = n) = \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_{n-1} = m-1)\mathbb{P}(X_n = 1).$$
Puisque $X_1+\cdots+X_{n-1} \sim \mathscr{B}(n-1,p)$ et $X_n \sim \mathscr{B}(p)$, on obtient
$$\boxed{\mathbb{P}(T_m = n) = \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m}}$$
et cette écriture vaut aussi quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.
3. En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient
$$\boxed{\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1} t^n \text{ pour } t \in]-1,1[}$$
4. Par définition
$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n$$
En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation
$$\boxed{G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}(pt)^m((1-p)t)^n = \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}}$$

Comme G_{T_m} est deux fois dérivable en 1, $T_m \in L^2$ et on en déduit

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = G'_{T_m}(1) = \frac{m}{p}}$$

Puis

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_{T_m}(1) = \frac{m(m-2p+1)}{p^2}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{V}(X)} = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{m(m-2p+1)}{p^2} + \frac{m}{p} - \frac{m^2}{p^2} = \boxed{\frac{m(1-p)}{p}}$$

(et on retrouve dans le cas $m=1$ l'espérance et la variance pour une loi géométrique.)

5. Si $X_1, \dots, X_m$ sont des vaaid de loi $\mathscr{G}(p)$, $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$, $G_{S_m} = \left(G_{X_1}\right)^m = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^m = G_{T_m}$ donc

$$\boxed{S_m \sim T_m \text{ suit une loi de Pascal de paramètre } (m,p).}$$

41 Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock (situation type Wald)

Le nombre N de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente est supposé suivre une **loi de Poisson**[2] de paramètre $\lambda > 0$.

1. Dans cette question, un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).
   Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.
   On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.
   On modélise la situation de la manière suivante : en plus de la variable aléatoire N, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^{e} client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.
   Déterminer la loi de T et la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock.
2. Dans cette question, les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
   Le nombre d'articles achetés pendant une journée est maintenant noté S.
   On définit cette fois une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que Y_n représente le nombre d'achats d'article A du n^{e} client.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_S de la variable aléatoire S, en tout $t \in [-1, 1]$.
   (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(S = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
   (c) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

Solution de 41 : Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock (situation type Wald)

1. $T = \sum_{j=1}^{N} X_j$ (qui est bien nul si $N = 0$). Attention ce n'est pas une somme classique de vaaid de même loi de Bernoulli car leur nombre est aussi une variable aléatoire (N).
   $\mathbb{P}(T = k) = \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}(T = k | N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = k\right)\mathbb{P}(N = n)$ (formule des probabilités totales, sce associé à N) donne $\mathbb{P}(T = k) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$ car $\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \mathscr{B}(n, p)$. Donc $\boxed{T \sim \mathscr{P}(\lambda p)}$.
   $$\boxed{\mathbb{P}(T \leqslant s) = \mathrm{e}^{-\lambda p}\sum_{k=0}^{s}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.}$$
2. (a) On trouve $\boxed{G_S(t) = G_N(G_{Y_1}(t)) = \exp(\lambda(-5/6 + t/2 + t^2/3))}$: c'est l'identité de Wald vu en cours. On commence par réécrire $G_S(t)$ en utilisant la formule des probabilités totales avec sce $(N = n)$, puis on utilise Fubini (la sommabilité ne posant pas de problème, quitte à rajouter des valeurs absolues, on obtient $G_S(|t|) < +\infty$), ce qui permet de reconnaître $G_n \circ G_{Y_1}$ après avoir utilisé $G_{S_n} = G_{Y_1}^n$ où $S_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ somme de vaiid.
   (b) On trouve $\boxed{\mathbb{P}(S = 3) = \frac{G_S'''(0)}{3!} = \frac{\lambda^3 + 8\lambda^2}{48}\mathrm{e}^{-\frac{5\lambda}{6}}}$ soit, $\boxed{\text{pour } \lambda = 6,\ \frac{21}{2}\mathrm{e}^{-5} \approx 0,07.}$
   (c) La double dérivabilité de G_S en 1 donne l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$.
   On calcule alors $\boxed{G_S'(1) = \mathbb{E}(S) = \frac{7\lambda}{6}}$ et $G_S''(1) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S) = \frac{2\lambda}{3} + \left(\frac{7\lambda}{6}\right)^2$ donc $\boxed{\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = \frac{11\lambda}{6},}$ ce qui donne $\boxed{\text{respectivement } 7 \text{ et } 11 \text{ pour } \lambda = 6.}$

2. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.