MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[-1,1]$ et à valeurs réelles.

Q1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant pour f et g éléments de E :

$$(f|g)=\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q2. On note $u : t \mapsto 1$, $v : t \mapsto t$ et $F = \mathrm{vect}\{u, v\}$, déterminer une base orthonormée de F.

Q3. Déterminer le projeté orthogonal de la fonction $w : t \mapsto e^t$ sur le sous-espace F et en déduire la valeur du réel $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\left[\int_{-1}^{1}\left(e^t-(a+bt)\right)^2 \mathrm{d}t\right]$.
On pourra simplifier les calculs en utilisant le théorème de Pythagore.

EXERCICE II

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q1. Question préliminaire
Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{\lambda}{n}$.
Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{n}{n}\ \dfrac{n-1}{n} \ldots \dfrac{n-k+1}{n}\right] = 1$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(X_n = k\right)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0{,}01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q2. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCINP n candidats tous nés en 2005. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 2025. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q3. Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0{,}6}$.

PROBLÈME

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)t^j.$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$.

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n)\,.$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \iff f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{V_n = 0\}$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(V_1 = k | S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q15. On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

FIN