Programme de colle – MPI

1. Probabilités

Extrait du programme officiel :

e) Variables aléatoires discrètes

Contenus	Capacités & commentaires
Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans E est une application définie sur Ω, à valeurs dans l'ensemble E, telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à $\mathscr{A}$.	Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle. Notations $(X \leqslant x), (X \geqslant x), (X < x), (X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X.
Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X.	La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.
Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes. La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Notation $X \sim Y$.	La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.	Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Contenus	Capacités & commentaires
Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes. Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$	Extension au cas de plus de deux variables.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Contenus	Capacités & commentaires
Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p. Variable géométrique de paramètre p.	Notations $\mathscr{G}(p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$. Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ. Variable de Poisson de paramètre λ.	Notations $\mathscr{P}(\lambda)$, $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Contenus	Capacités & commentaires
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x\,P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées. La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes ; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable ; si tel est le cas : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\,P(X = x)$.	
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.
Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$. Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et : $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires.

i) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Contenus	Capacités & commentaires
Si $\mathrm{E}(X^2) < +\infty$, X est d'espérance finie.	La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	Cas d'égalité.
Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson. Covariance de deux variables aléatoires de L^2. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.	

j) Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres

Contenus	Capacités & commentaires
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left\lvert \dfrac{S_n}{n} - m \right\rvert \geqslant \varepsilon\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$.	Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

Pas de fonction génératrice cette semaine.

2. Espaces préhilbertiens réels (révisions de MP2I)

Extrait du programme officiel :

a) Produit scalaire

Contenus	Capacités & commentaires
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x \mid y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.	Expressions $X^\top Y$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.

b) Norme associée à un produit scalaire

Contenus	Capacités & commentaires
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\lVert x + y\rVert^2 = \lVert x\rVert^2 + \lVert y\rVert^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.

c) Orthogonalité

Contenus	Capacités & commentaires
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.

Contenus	Capacités & Commentaires
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	

d) Bases orthonormales

Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	

e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	Notation $d(x,F)$. En dimension finie, projeté orthogonal d'un vecteur sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$; distance de x à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Semaine prochaine : Fonctions génératrices, espaces vectoriels normés.

3. Questions de cours

(i) Pour chaque loi au programme (Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson) : Loi, situation type (si adapté), espérance et variance (avec justifications).

(ii) Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(X\geqslant n)$. (deux méthodes)

(iii) ✱ Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

(iv) ✱ Théorème de représentation de Riesz des formes linéaires. Inégalité de Bessel.

(v) ✱ Supplémentarité de l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale du sous-espace.

(vi) Exercices CCINP

4. Exercices CCINP

- **CCINP 39** : On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.
  1. (a) Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

     On pose alors $(x|y)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x_n y_n$.

     (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

  Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
  On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

  2. ~~Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.~~
     ~~Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.~~
  3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
     Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$). Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.
- **CCINP 76** : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
  On pose $\forall\, x\in E,\ \|x\|=\sqrt{(x|x)}$.
  1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
     (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
  2. Soit $E=\left\{f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x\in[a,b]\ f(x)>0\right\}$. Prouver que l'ensemble
  $$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f\in E\right\}$$
  admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.
- **CCINP 77** : Soit E un espace euclidien.
  1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp=A$.
  2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
     (a) Démontrer que $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.
     (b) Démontrer que $(F\cap G)^\perp=F^\perp+G^\perp$.
- **CCINP 79** : Soit a et b deux réels tels que $a<b$.
  1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
     Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0\Longrightarrow h=0$.
  2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
     On pose $\forall\,(f,g)\in E^2,\ (f|g)=\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
  3. Majorer $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- **CCINP 80** : Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  1. Démontrer que $\left(f\,|g\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
  2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f:x\mapsto\cos x$ et $g:x\mapsto\cos(2x)$.

     Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u:x\mapsto\sin^2 x$.
- **CCINP 81** : On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A,A')=\mathrm{tr}(A^\intercal A')$, où $\mathrm{tr}(A^\intercal A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\intercal$ par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  On note $\mathcal{F}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
  1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
  3. Déterminer la projection orthogonale de $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
  4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.
- **CCINP 82** : Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.
  On admet que, pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x-y_0\|$.
  Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}$, on pose $\left(A\middle|A'\right)=aa'+bb'+cc'+dd'$.
  1. Démontrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  2. Calculer la distance de la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.
- **CCINP 92** : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
  On pose $\forall(A,B)\in E^2,\ \langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^\intercal B)$ où tr désigne la trace et $A^\intercal$ désigne la transposée de la matrice A.
  1. Prouver que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
  2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
     Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\intercal=-A$.
     On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
     On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
     (a) Prouver que $E=S_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})$.
     (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp=S_n(\mathbb{R})$.
  3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.
- **CCINP 97** : Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par
$$\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X,Y)=(j,k)\big)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\,j!\,k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

- **CCINP 98** : Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p (où $p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
  1. Donner la loi de X. Justifier.
  2. Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
     (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k \mid X=i)$.
     (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
     Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
     (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

- **CCINP 99** :
  1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$.
     On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
     Prouver que
     $$\forall a \in]0,+\infty[,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$
  3. **Application**
     On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
     À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
     Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^e tirage.

- **CCINP 100** : Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$
  1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
  2. Calculer λ.
  3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
  4. X admet-elle une variance ? Justifier.

- **CCINP 102** : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
  1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
  2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
     (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
     (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

- **CCINP 103** : **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
  1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0,+\infty[)^2$.
     Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
     On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
     Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
     (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
  2. Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.
     Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
     On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
     On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p).
     Déterminer la loi de X.

- **CCINP 104** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
  1. Préciser les valeurs prises par X.
  2. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X=2)$.
     (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
  3. (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
     (b) Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.

- **CCINP 106** : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X,Y)$ et $V = \inf(X,Y)$.
  1. Déterminer la loi du couple (U,V).
  2. Déterminer la loi marginale de U.
     On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(V=n) = pq^{2n}(1+q)$.
  3. Prouver que $W = V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
  4. U et V sont-elles indépendantes ?

- **CCINP 108** : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X,Y) est donnée par $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$
  1. Déterminer les lois de X et de Y.
  2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
     (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
  3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
  4. Calculer $P(X=Y)$.

- **CCINP 109** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
  1. Déterminer la loi de X.
  2. Déterminer la loi de Y.

- **CCINP 111** : On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in]-1,1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

  Soit $p \in]0,1[$.
  Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
  Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
  On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
  2. (a) Déterminer la loi de Y.
     (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
     (c) Déterminer l'espérance de Y.
  3. Déterminer la loi de X.