2025 Banque CCINP – MP-MPI

Table des matières

I Analyse : exercices 1 à 58

Exercice 1 : Analyse

Exercice 2 : Analyse

On pose $f(x)=\dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. **Décomposer** $f(x)$ **en éléments simples.**
2. **En déduire que** f **est développable en série entière sur un intervalle du type** $]-r,r[$ **(où** $r>0$**).**
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D **de ce développement en série entière.**
3. **(a) Soit** $\sum a_n x^n$ **une série entière de rayon** $R>0$.
   On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p**, en le prouvant,** a_p **en fonction de** $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f **à l'ordre** 3 **au voisinage de** 0.

---

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4}{(x+1)^2}.}$

2. D'après le cours, $x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.
   De plus, on a $\forall\, x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ et $\dfrac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent). On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière. Et

$$\forall\, x\in]-1,1[,\ f(x)=3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n.$$

   C'est-à-dire $\boxed{\forall\, x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(4n+7)x^n.}$
   Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f. D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset D$.
   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum(-1)^n(4n+7)x^n$. D'après ce qui précède $R\geqslant 1$.
   Posons, pour tout entier naturel n, $a_n=(-1)^n(4n+7)$.
   Pour $x=1$ et $x=-1$, $|a_n x^n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ donc $\sum(-1)^n(4n+7)x^n$ diverge grossièrement et ainsi $R\leqslant 1$, $1\notin D$ et $-1\notin D$.
   On en déduit que $\boxed{D=]-1,1[.}$

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$. On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.
   D'après le cours, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\ \forall\, x\in]-R,R[,\ g^{(p)}(x)=\sum_{n=p}^{+\infty}n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}.$$

   Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $g^{(p)}(0)=p!a_p$ (tous les termes pour $n>p$ sont nuls). C'est-à-dire, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\boxed{a_p=\dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}.}$

   (b) f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-1,1[$. Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0,

$$f(x)=\sum_{p=0}^{3}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

   Or, d'après les questions précédentes, pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}=(-1)^p(4p+7)$.

   Ainsi, au voisinage de 0, $\boxed{f(x)=\sum\limits_{p=0}^{3}(-1)^p(4p+7)x^p+\mathrm{o}\left(x^3\right)=f(x)=7-11x+15x^2-19x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right).}$

Exercice 3 : Analyse

1. **On pose** $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ **et** $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$**. Calculer, pour tout entier naturel** k**, la dérivée d'ordre** k **des fonctions** g **et** h **sur leurs ensembles de définitions respectifs.**
2. **On pose** $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$**. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée** n^{e} **d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel** n **et pour tout** $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$**, la valeur de** $f^{(n)}(x)$**.**
3. **Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.**

---

1. g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On prouve, par récurrence, que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g^{(k)}(x)=2^k\mathrm{e}^{2x}\quad \text{et}\quad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.}$$

2. g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\boxed{f^{(n)}(x)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}=\boxed{n!\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.}$$

3. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « Si $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et

$$\boxed{\forall x\in I,\ (fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).}\ \text{»}$$

Prouvons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

- $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies (dérivée d'un produit).
- Soit $n\geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x\in I,\ (fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.
Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I. Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

$$\forall x\in I,\ (fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(n-k)}(x)g^{(k+1)}(x)\right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x\in I,\ (fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$ avec $\binom{n}{-1}=\binom{n}{n+1}=0$.

Or, en utilisant la formule de Pascal, on a $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit la récurrence.

Exercice 4 : Analyse

1. **Énoncer le théorème des accroissements finis.**
2. **Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.**
On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. **Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.**
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

---

1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que
   H1 f est continue sur $[a,b]$
   H2 f est dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.
Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$.
En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que
$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c_h)h.$$
Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$. Donc
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c_h) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x) = \ell.$$
On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \ell.}$
3. La fonction g proposée dans l'indication est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par opérations.
g est également dérivable en 0 si $x \neq 0$, $g(x) = x \times \underbrace{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} = o(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$ de g donc $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$ et $g'(0) = 0$.
Autre argument possible : $\dfrac{g(h) - g(0)}{h} = h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ car le sinus est borné.
Cependant,
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
avec $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ car le sinus est borné, mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 car $\cos\left(\dfrac{1}{(n\pi)^{-1}}\right) = (-1)^n$.
Donc $\boxed{g' \text{ n'a pas de limite en } 0.}$

Exercice 5 : Analyse

Exercice 6 : Analyse

Exercice 7 : Analyse

Exercice 8 : Analyse

Exercice 9 : Analyse

Exercice 10 : Analyse

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$**.**

1. **Démontrer que la suite de fonctions** (f_n) **converge uniformément sur** $[0,1]$**.**
2. **Calculer la limite lorsque** $n \to +\infty$ **de** $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$**.**

---

1. Pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x^2+1)\mathrm{e}^x$: la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$. On a
$$\forall x \in [0,1],\ \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|(x^2+1)\frac{x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)}{n+x}\right| \leqslant \frac{2\mathrm{e}}{n} \text{qui ne dépend pas de } x.$$
donc $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n} \to 0$ puis $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et donc
$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$$
2. **H1** Toutes les s f_n sont continues sur $[0,1]$;
H2 (f_n) converge uniformément sur le segment $[0,1]$.
On peut intervertir limite et intégrale :
$$\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$
En effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}-3.}$

Exercice 11 : Analyse

Exercice 12 : Analyse

Exercice 13 : Analyse

Exercice 14 : Analyse

1. **Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.**
2. **Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.**
3. **Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.**

---

1. $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\left\|f_n-f\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2. Il suffit de l'appliquer à la suite des sommes partielles (S_n) dont la convergence uniforme en tant que suite de fonctions est équivalente à la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f_n$. Par ailleurs, la continuité des fonctions f_n implique celle des sommes partielles S_n.
3. On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme :

   H1 $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

   H2 La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (si $f_n : x\mapsto x^n$, alors $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ qui est un terme général de série géométrique convergente).

   On en déduit alors que

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}}.$$

Exercice 15 : Analyse

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. **Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.**
3. **La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?**

---

1. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur X lorsque les f_n sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

   On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X lorsque la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge uniformément, ce qui équivaut à la convergence uniforme de suite $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)$ vers la fonction nulle.
2. En cas de convergence normale, on a, au moins à partir d'un certain rang, pour tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ donc convergence absolue de $\sum f_n(x)$ et donc convergence simple de $\sum f_n$ sur X. On peut donc bien parler de reste.
   Puis, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in X$,
   $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty,$$
   le dernier terme ne dépendant pas de x et tendant vers 0 comme reste de série convergente, donc $(R_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } X.}$
3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n^2}{n!} \neq 0$. Alors
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n^2} \to 0.$$
   On en déduit, par critère de d'Alembert, que la série entière $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$. En particulier, d'après 2.,
   $$\boxed{\text{cette série entière converge uniformément sur tout disque de centre } 0 \text{ et de rayon } R.}$$

Exercice 16 : Analyse

On considère la série de fonctions de terme général f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

1. **Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.**
2. **On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.**

   En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. **Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.**

---

1. On a, pour tout $x \in]0,1]$, $-f_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$ terme général positif de série convergente, donc, par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge. C'est aussi le cas pour $x=0$ car $f_n(0)=0$. Donc $\boxed{S \text{ est bien définie sur } [0,1].}$
2. Comme
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n},$$
   u_n est la somme partielle d'ordre n de la série précédente pour $x=1$, donc $\boxed{u_n \to S(1).}$

   Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - u_n = \ln n + o(\ln n)$ et donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n.}$
3. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions :

   H1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$

   H2 D'après la question 1, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

   H3 $\forall x \in [0,1]$, $f_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$,
$$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
   On en déduit que $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ qui est un terme général positif de série convergente.

   Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

   On peut alors affirmer que la fonction $\boxed{S \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$ et on a $\forall x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

   En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1$ par télescopage. Donc $\boxed{S'(1) = -1.}$

Exercice 17 : Analyse

Exercice 18 : Analyse

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$**. On considère la série de fonctions** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de cette série.**
   On note D **l'ensemble des** x **où cette série converge et** $S(x)$ **la somme de cette série pour** $x \in D$.
2. **(a) La fonction** S **est-elle continue sur** D **?**
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

---

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le théorème spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $\boxed{D =]-1,1].}$
2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1,1[$.
   En $x = 1$, il s'agit de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, dont la convergence est assurée par le théorème spécial des séries alternées.
   Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de S en 1, et donc finalement $\boxed{S \text{ est continue sur } D \text{ entier.}}$

   (b) $\forall x \in D,\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$, donc $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ (atteint en $x = 1$) et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

   Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n \text{ ne converge pas normalement sur } D.}$

   $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n \text{ ne converge pas uniformément sur } D \text{ non plus}}$ car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (c) On étudie la convergence uniforme sur $[0,1]$.

   Pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées : $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers 0. Cela permet de majorer son reste R_n. On a

   $$\forall x \in [0,1],\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

   Donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. Donc, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$

   Bilan final : En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$ et converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$.

Exercice 19 : Analyse

1. **(a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.**
   Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

   (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2. **(a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :** $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

   (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.

   (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

---

1. (a) On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ d'une série de fonctions :
   - **H1** les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$;
   - **H2** la série de fonction converge simplement sur $]-R,R[$;
   - **H3** la série des f_n' qui a même rayon de convergence converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$.

   (b) Et donc, en dérivant $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.}$

2. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\boxed{\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.}$

   (b) Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de rayon R_a et R_b respectivement, alors la série des $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ est de rayon de $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < R_c$,

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

   (c) En effectuant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

   $$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.}$$

Exercice 20 : Analyse

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
2. **Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :**

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

   (c) $\sum \cos(n) z^n$.

---

1. Donner les deux définitions :
   - Celle du programme : $R = \sup\left(\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ bornée}\}\right) \in [0, +\infty]$
   - Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

$$|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. (a) Comme la série entière est lacunaire, on utiliser le critère de d'Alembert général : pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{(n+1)!^2\,|z|^{2n+3}\,(2n)!}{(2n+2)!n!^2\,|z|^{2n+1}} \to \frac{|z|^2}{4},$$

   donc la série entière converge absolument si $|z| < 2$ et diverge grossièrement si $|z| > 2$: $\boxed{R = 2.}$

   (b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$$

   et comme les séries entières $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum n z^n$ ont un rayon de convergence égal à celui de $\sum z^n$ donc 1, c'est aussi le cas de $\sum n^{(-1)^n} z^n$: $\boxed{R = 1.}$

   (c) La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0 (sinon, on a un problème avec $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1 \ldots$) donc la série $\sum \cos(n) 1^n$ ne converge pas absolument, donc $\boxed{R = 1.}$

   Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.

Exercice 21 : Analyse

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
2. **Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.**
3. **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?**

---

1. Donner les deux définitions :
   - Celle du programme : $R = \sup\left(\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n) \text{ bornée}\}\right) \in [0,+\infty]$
   - Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R \in [0,+\infty]$ tel que

$$|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. Comme $\sum a_n 1^n$ et $(a_n 1^n)$ est bornée, 1 est sur le cercle de convergence : $\boxed{R=1.}$
3. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant a_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$

par l'inégalité de convexité classique sur le $\ln$ (au programme de première année) donc (a_n) est bornée.
De plus,

$$a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{terme général positif de série divergente}$$

donc $\sum a_n$ diverge par comparaison.

Autre argument possible : $a_{2n} = \sqrt{2n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \longrightarrow 1$ donc $a_n \not\to 0$: la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Donc $\boxed{R=1.}$

Exercice 22 : Analyse

1. **Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.**
2. **Développer en série entière au voisinage de** 0**, en précisant le rayon de convergence, la fonction** $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$ **?** $x = \frac{1}{2}$ **?** $x = -\frac{1}{2}$ **?**
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

---

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
   On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$.
   Alors $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$.
   En effet, Si $|z| \leqslant \min(R_a, R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b)$.
   Si $R_a \neq R_b$, par exemple $R_a < R_b$, z tel que $R_a < |z| < R_b$, alors $a_n z^n \not\to 0$ et $b_n z^n \to 0$ donc $(a_n + b_n) z^n \not\to 0$ et $|z| \geqslant R_{a+b}$ puis $R_a \geqslant R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b) = R_a$.
2. Pour $|x| < 1$, $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$. Pour $|x| < \frac{1}{2}$, $\ln(1-2x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$.
   D'après 1., le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.
   Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, et, $\boxed{\text{pour } |x| < \frac{1}{2},\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 2^n}{n} x^n.}$

   Pour $x = \frac{1}{4}$: $\boxed{\text{la série entière converge et est continue en } \frac{1}{4}}$ car $\frac{1}{4} \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
   Pour $x = \frac{1}{2}$: $\boxed{\text{la série entière diverge}}$ car elle est la somme d'une série convergente : $\frac{1}{2}$ appartient à $]-1, 1[$, intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, et d'une série divergente : la série harmonique.
   Pour $x = -\frac{1}{2}$: $\boxed{\text{la série entière converge}}$ en $-\frac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes. En effet,
   - d'une part, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$;
   - d'autre part, $\sum\limits_{n\geqslant 1} -\frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante et de limite nulle.

   $\boxed{\text{La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée}}$ par le théorème d'Abel radial appliqué à $x \mapsto f(-x)$.

   Remarque : Soit $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon $R > 0$. On note f la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.
   La version du théorème d'Abel radial au programme assure que

   $$\text{si } \sum a_n R^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

   En considérant la fonction la fonction $x \longmapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$ (de rayon de convergence toujours égal à R), on a immédiatement l'extension suivante

   $$\text{si } \sum a_n (-R)^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to -R^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n.$$

Exercice 23 : Analyse

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. **Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.**
2. **Démontrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.**

---

1. On pose ℓ la limite de la suite convergente $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Alors, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières, $R\left(\sum a_n x^n\right) = R = \dfrac{1}{\ell}$ (avec $R=+\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R=0$ dans le cas $\ell=+\infty$).
   Puis, comme $\dfrac{|(n+1)a_{n+1}|}{|na_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $\boxed{R\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right) = \dfrac{1}{\ell} = R = R\left(\sum a_n x^n\right).}$
2. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in]-R,R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
   Soit $r \in [0,R[$. On pose $D_r = [-r,r]$.
   On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions :
   H1 $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
   H2 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r .
   H3 D'après 1., $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
   Donc, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$, donc converge uniformément sur D_r.

   On en déduit que $\forall\, r \in [0,R[$, $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r. Donc,

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-R,R[.}$$

Exercice 24 : Analyse

1. **Déterminer le rayon de convergence de la série entière** $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. **Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction** $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ **et préciser le rayon de convergence.**
3. (a) **Déterminer** $S(x)$.

   (b) **On considère la fonction** f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par :**

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

   Démontrer que f **est de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** $\mathbb{R}$.

---

1. Par critère de d'Alembert, comme $\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow 0$,

$$\boxed{\text{la série entière } \sum \frac{x^n}{(2n)!} \text{ à pour rayon de convergence } +\infty.}$$

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ de rayon de convergence } +\infty.}$
3. (a) $\boxed{\text{Pour } x \geqslant 0,}$ on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t)$ donc $\boxed{S(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x}.}$

   $\boxed{\text{Pour } x < 0,}$ on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t)$ donc $\boxed{S(x) = \cos\sqrt{-x}.}$

   (b) D'après la question précédente, $\boxed{f = S \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Exercice 25 : Analyse

1. **Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.**
2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).**

---

1. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.
   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ avec
   $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$
   donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ converge et ainsi, par positivité, f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Autre rédaction possible : dans $[0,+\infty]$,
   $$0 \leqslant \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$
   d'où la convergence de l'intégrale puis l'intégrabilité par positivité.
2. On utilise le théorème de convergence dominée :
   H1 La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par
   $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0,1[\\ \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t \in]1,+\infty[\end{cases}$$
   H2 Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   H3 $\forall t \in [0,+\infty[, |f_n(t)| \leqslant \phi(t)$ avec ϕ positive, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Alors
   $$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$
   Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.}$

Exercice 26 : Analyse

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. **Justifier que I_n est bien définie.**
2. **(a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?**

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$. Or $2n > 1$, donc $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de Riemann. Donc, par équivalence, $\boxed{f_n \text{ est intégrable}}$ sur $[1,+\infty[$ donc $\boxed{\text{sur } [0,+\infty[.}$

2. (a) $\forall\, t \in [0,+\infty[,\ f_{n+1}(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n} = f_n(t)$ car $1+t^2 \geqslant 1$.
   En intégrant, on obtient
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} \leqslant I_n.$$
   Donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

   H1 La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (On peut aussi appliquer le théorème sur $]0,+\infty[$ pour ne pas avoir à traiter le cas particulier de $x=0$.)

   H2 Les f_n et f sont continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

   H3 Domination
   $$\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \phi(t)$$
   avec ϕ continue et positive sur $[0,+\infty[$ et
   $$\int_0^{+\infty} \left|\phi(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty,$$
   donc ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   On obtient alors
   $$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
   et $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ a pour limite } 0.}$

3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
   Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer que
   $$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n \text{ converge.}}$$

Exercice 27 : Analyse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**, on pose** $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ **et** $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$**.**

1. **Étudier la convergence simple de la suite de fonctions** (f_n) **sur** $[0,1]$**.**
2. **Soit** $a \in]0,1[$**. La suite de fonctions** (f_n) **converge-t-elle uniformément sur** $[a,1]$ **?**
3. **La suite de fonctions** (f_n) **converge-t-elle uniformément sur** $[0,1]$ **?**
4. **Trouver la limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **.**

---

1. On a déjà $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Soit $x \in]0,1]$. Pour n au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

2. Soit $a \in]0;1[$.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in [a,1]\,,\ \left|f_n(x) - f(x)\right| = f_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$$

   Comme cette majoration est indépendante de x, $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.

   Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit que $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,1].}$

3. Les fonctions f_n étant continues sur $[0,1]$ et la limite simple f ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a $\boxed{\text{pas convergence uniforme sur } [0,1].}$

4. On utilise le théorème de convergence dominée.

   H1 (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$.

   H2 Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,1]$.

   H3 **Domination** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in [0,1], \left|f_n(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 = \varphi(x)$ avec $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue, positive, intégrable sur $[0,1]$.

   On en conclut donc que

$$\boxed{u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

Exercice 28 : Analyse

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. **La fonction** $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ **est-elle intégrable sur** $]2,+\infty[$ **?**
2. **Soit** a **un réel strictement positif.**
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ **est-elle intégrable sur** $]0,+\infty[$ **?**

---

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ continue sur $]2,+\infty[$. De plus,

   Sur $]2,3]$
   $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} \times \frac{1}{(x-2)^{1/2}}.$$
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable sur $]2,3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2,3]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$).
   Donc, par comparaison, f est intégrable sur $]2,3]$.

   Sur $[3,+\infty[$
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = g(x.)$$
   Or $x^2 g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3,+\infty[$, on en déduit que g est intégrable sur $[3,+\infty[$.
   Donc, par comparaison, f est intégrable sur $[3,+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]2,+\infty[.}$

2. **Cas particulier d'intégrales de Bertrand** : soit a un réel strictement positif. On pose $f : x \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$, fonction continue sur $]0,+\infty[$.

   Sur $]0,\mathrm{e}]$
   $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x = g(x).$$
   Or $\sqrt{x} g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, au voisinage de 0, $g(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$ car $1/2 < 1$).
   Donc g est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$, et, par comparaison, f est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   Sur $[\mathrm{e},+\infty[$
   $$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^a} = h(x).$$
   si $a > 1$, prenons γ tel que $1 < \gamma < a$.
   $$x^\gamma h(x) = x^{\gamma-a}\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
   donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ car $\gamma > 1$), donc h est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
   Ainsi, par comparaison, f est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

   si $a \leqslant 1$,
   $$\forall x \in [\mathrm{e},+\infty[,\ h(x) \geqslant \frac{1}{x^a} \geqslant 0$$
   (C'est la raison pour laquelle on a coupé l'intervalle en e.)
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann avec $a \leqslant 1$), donc, par comparaison de fonctions positives, h n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
   Ainsi, par équivalence, f n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

   Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[\text{ si et seulement si } a > 1.}$

Exercice 29 : Analyse

On pose $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ **.**

1. **Démontrer que :** $\forall\, x \in]0,+\infty[$**, la fonction** $t \mapsto f(x,t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$**.**

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$**.**

2. **Pour tout** $x \in]0,+\infty[$**, exprimer** $\Gamma(x+1)$ **en fonction de** $\Gamma(x)$**.**
3. **Démontrer que** Γ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0,+\infty[$ **et exprimer** $\Gamma'(x)$ **sous forme d'intégrale.**

---

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive.
   - Intégrabilité sur $[1,+\infty[$: par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann.
   - Intégrabilité sur $]0,1]$: $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-x<1$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_*^+.}$
2. Par intégration par parties, si $0 < \varepsilon < A$,
$$\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t$$
   Mais, par croissances comparées,
$$\mathrm{e}^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$
   et de plus
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$
   On en déduit, en prenant les limites quand $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$,
$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$
   C'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$
3. On utilise le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres.

   H1 Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par opérations avec
$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \longmapsto \ln(t) f(x,t).$$
   H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par 1.

   H3 Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

   H4 **Domination :** Soit $K = [a,b]$ avec $0 < a < b$. On a
$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \begin{cases} |\ln t|\,\mathrm{e}^{-t} t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ |\ln t|\,\mathrm{e}^{-t} t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$
   avec ϕ positive, continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi(t) \underset{t\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a<\alpha<1$ et sur $[1,+\infty[$, car $\phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   On a donc $\boxed{\Gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_*^+)}$ et $\boxed{\Gamma' : (x,t) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) f(x,t)\,\mathrm{d}t.}$

Exercice 30 : Analyse

1. **Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.**
2. **Démontrer que la fonction** $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$.
3. **(a) Trouver une équation différentielle linéaire** (E) **d'ordre** 1 **dont** f **est solution.**
   (b) Résoudre (E).

Pour gagner du temps, il est conseillé de traiter les deux premières questions simultanément !

1. Soit I et J des intervalles réels et $g : \begin{array}{|lcl} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$

   On suppose

   H1 $\forall\, t\in I,\ \ x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée $x\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$.

   H2 $\forall\, x\in J,\ \ t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.

   H3 $\forall\, x\in J,\ \ t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur I.

   H4 Domination globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive, intégrable sur I telle que
   $$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant \phi(t).$$

   Alors

   C1 $f : x\mapsto \int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J

   C2 $\forall\, x\in J,\ \ t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I et $f'(x)=\displaystyle\int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2. On pose $g : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R}\times[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt) \end{array}$

   On applique le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres.

   H1 $\forall t\in[0,+\infty]$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations et
   $$\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t)\mapsto -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$

   H2 $\forall x\in\mathbb{R}$, $t\longmapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $|u(x,t)|\leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc, $t\longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$.

   H3 $\forall x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

   H4 Domination globale $\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}=\phi(t)$ avec ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.

   En effet, par croissances comparées, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, ϕ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.

   On a donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et
   $$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t.$$

3. (a) On a, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Procédons à une intégration par parties. Soit $A\geqslant 0$.
   $$\int_0^A -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A-\int_0^A \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
   En passant à la limite quand $A\to+\infty$, on obtient $f'(x)+\dfrac{x}{2}f(x)=0$.

   Donc f est solution de l'équation différentielle $\boxed{(L) : y'+\dfrac{x}{2}y=0.}$

   (b) Les solutions de (L) sont les fonctions $\boxed{x\mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \text{ avec } A\in\mathbb{R}.}$

Exercice 31

Exercice 32 : Analyse

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. **Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle** $]-r,r[$ **de** $\mathbb{R}$**, avec** $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. **Est-ce que toutes les solutions de** $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ **sur** $]0,1[$ **sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur** $]-1,1[$ **?**

---

1. **Analyse** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S. Pour tout $x\in]-R,R[$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \qquad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} \qquad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$

Donc

$$x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\Big)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0.$$

C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N},\ na_{n+1}=(n+1)a_n$, ce qui revient à

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=na_1.$$

Synthèse Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions

$$\boxed{x\mapsto a_1\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=a_1x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{a_1x}{(1-x)^2}}$$

définies sur $]-1,1[$ avec $a_1\in\mathbb{R}$, et même sur $\mathbb{R}$ si $a_1=0$.

2. Notons (L) l'équation $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   Prouvons que $\boxed{\text{les solutions de } (L) \text{ sur }]0,1[\text{ ne sont pas toutes développables en série entière sur }]-1,1[.}$
   En effet, si toutes les solutions de (L) sur $]0,1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (L) sur $]0,1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où $f:x\mapsto\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
   Or, comme les fonctions $x\longmapsto x(x-1)$, $x\longmapsto 3x$ et $x\longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et comme la fonction $x\longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de (L) sur $]0,1[$ est un plan vectoriel, ce qui est contradictoire.

Exercice 33 : Analyse

Exercice 34 : Analyse

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. **Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.**
2. **Démontrer que $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $x_n \longrightarrow x$.**
3. **Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.**
4. **Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$.**

---

1. Un point adhérent à A est un point x tel que toute boule ouverte centrée en x rencontre A :

$$\boxed{x \in E \quad \text{et} \quad \forall r>0,\ B(x,r)\cap A \neq \varnothing.}$$

2. $(\Longrightarrow)$ $\boxed{\text{On suppose que } x \text{ est adhérent à } A.}$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $r = \dfrac{1}{n+1}$, on a $x_n \in B\left(x, \dfrac{1}{n+1}\right) \cap A$ donc tel que $\mathrm{d}(x_n, x) = \|x_n - x\| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   Cela définit $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } x_n \to x.}$

   $(\Longleftarrow)$ $\boxed{\text{Si on a une suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \to x,}$ alors pour tout $r>0$, on a un rang à partir duquel $x_n \in B(a,r)\cap A \neq \varnothing$ donc $\boxed{x \in \overline{A}.}$

3.
   - $\overline{A}$ est une partie non vide de E puisqu'elle contient A entier.
   - Si $x, y \in \overline{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par la caractérisation séquentielle (question 2, sens direct), on a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$.
     Alors $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ (car A est un sous-espace vectoriel de E) est une suite telle que $x_n + \lambda y_n \longrightarrow x + \lambda y$.
     Donc, par la question 2 (sens réciproque), $x + \lambda y \in \overline{A}$.

   Par caractérisation, $\boxed{\overline{A} \text{ est encore un sous-espace vectoriel de } E.}$

4. Toujours avec la caractérisation séquentielle, en considérant la norme produit,

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \overline{A\times B} &\Longleftrightarrow \exists \left((x_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (A\times B)^{\mathbb{N}},\ (x_n, y_n) \longrightarrow (x,y) \\
&\Longleftrightarrow \exists \left((x_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in (A\times B)^{\mathbb{N}},\ x_n \longrightarrow x \quad \text{et} \quad y_n \longrightarrow y \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ x_n \longrightarrow x \\ \exists\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}},\ y_n \longrightarrow y \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow (x,y) \in \overline{A}\times\overline{B}.
\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}.}$

Exercice 35 : Analyse

Exercice 36 : Analyse

Exercice 37 : Analyse

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall f\in E,\ N_\infty(f)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \text{ et } N_1(f)=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t.$$

1. **(a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.**
   (b) Démontrer qu'il existe $k>0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f)\leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. **Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.**

---

1. (a) **Bonne définition** Une fonction continue sur un segment étant bornée et admettant bien une intégrale, N_∞ et N_1 sont bien définies sur E, à valeurs réelles.
   Défini-positivité Si $f\in E$, on a bien $N_\infty(f)\geqslant 0$ et $N_1(f)\geqslant 0$ et
   - Si $N_\infty(f)=0$, alors pour tout $x\in[0,1]$, $|f(x)|=0$ donc $f=0_E$.
   - Si $N_1(f)=0$, alors, comme $|f|$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$, $|f(x)|=0$ donc $f=0_E$.

   Homogénéité Si $f\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$,
   - Comme $|\lambda|\geqslant 0$, $N_\infty(\lambda f)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|\lambda f(x)|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left(|\lambda|\cdot|f(x)|\right)=|\lambda|\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=|\lambda|\,N_\infty(f)$.
   - $N_1(\lambda f)=\int_0^1|\lambda f(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1|\lambda|\cdot|f(t)|\,\mathrm{d}t=|\lambda|\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t=|\lambda|\,N_1(f)$ par linéarité de l'intégrale.

   Inégalité triangulaire Si $f,g\in E$, pour tout $x\in[0,1]$, $|f(x)+g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|$ donc
   - $|f(x)+g(x)|\leqslant N_\infty(f)+N_\infty(g)$ qui ne dépend pas de x donc $N_\infty(f+g)\leqslant N_\infty(f)+N_\infty(g)$.
   - Par croissance et linéarité de l'intégrale,

   $$N_1(f+g)=\int_0^1|f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\left(|f(t)|+|g(t)|\right)\mathrm{d}t=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|g(t)|\,\mathrm{d}t=N_1(f)+N_1(g).$$

   $\boxed{N_\infty \text{ et } N_1 \text{ sont donc bien des normes sur } E.}$

   (b) Soit $f\in E$. Pour tout $t\in[0,1]$, $|f(t)|\leqslant N_\infty(f)$ donc par croissance de l'intégrale,

   $$N_1(f)=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 N_\infty(f)=N_\infty(f).$$

   donc $\boxed{N_1(f)\leqslant 1\cdot N_\infty(f).}$

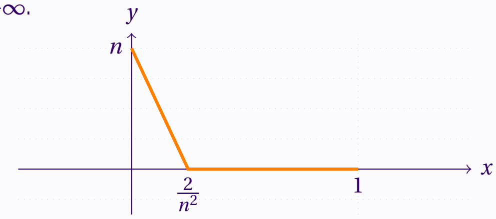
   (c) **Première méthode** Si $\mathscr{O}$ ouvert de E pour la norme N_1 et $f\in\mathscr{O}$, alors on a $r>0$ tel que la boule ouverte $B_1(f,r)$ pour N_1 est incluse dans $\mathscr{O}$.
   Alors, si $N_\infty(g-f)\leqslant r$, vu la question précédente, $N_1(g-f)\leqslant r$ donc $g\in B_1(f,r)\subset E$.
   On a donc $r>0$ tel que $B_\infty(f,r)\subset E$ (boule ouverte pour N_∞) : $\boxed{\mathscr{O} \text{ est ouvert pour } N_\infty.}$
   Deuxième méthode la question précédente nous dit que l'application linéaire

   $$\mathrm{id}_E:(E,N_\infty)\longrightarrow(E,N_1)$$

   est continue. Alors, $\boxed{\text{si } \mathscr{O} \text{ est un ouvert de } E \text{ pour } N_1,\ \mathscr{O}=\mathrm{id}_E^{-1}(\mathscr{O}) \text{ est un ouvert pour } N_\infty.}$

2. Pour montrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\left(\dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.
   - $f_n:x\mapsto x^n$ convient car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $N_\infty(f_n)=1$ et $N_1(f_n)=\dfrac{1}{n+1}$ donc $\dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}=n+1\to+\infty$.
   - On peut aussi, de façon moins miraculeuse, chercher une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $(N_1(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et non $(N_\infty(f_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cela peut se construire manuellement est imposant la norme infinie à valoir n tandis que l'aire sous la courbe vaut $\frac{1}{n}$ par exemple. Il suffit que f_n soit affine de $(0,n)$ à $\left(\frac{2}{n^2},0\right)$ et nulle ensuite (l'intégrale de f_n est l'aire d'un triangle rectangle valant $\frac{1}{n}$).

   Alors, si $n\geqslant 1$, $\dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}=n^2\to+\infty$.



Exercice 38 : Analyse

Exercice 39 : Analyse

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) **Démontrer que, pour $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, la série $\sum x_ny_n$ converge.**

   On pose alors $(x|y)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x_ny_n$.

   (b) **Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.**

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire dans ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

2. **Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x=(x_n)\in\ell^2$, on pose $\varphi(x)=x_p$.**
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.
3. **On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.**
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\cdot|\cdot)$). Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

---

1. (a) Soit $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ et $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$.
   Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_ny_n|\leqslant\frac{1}{2}\left(x_n^2+y_n^2\right)$ qui est un terme général positif de série convergente.
   Donc, par comparaison de termes généraux positifs, $\boxed{\sum x_ny_n \text{ converge}}$ absolument donc converge.

   (b) ℓ^2 est une partie non vide (contient la suite nulle) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   Et, si $x,y\in\ell^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$(x_n+\lambda y_n)^2=x_n^2+\lambda^2y_n^2+2\lambda x_ny_n$$
   est un terme général de série convergente par combinaison linéaire de termes généraux de séries convergente, en utilisant la question précédente.
   Donc $x+\lambda y\in\ell^2$ qui est un $\boxed{\text{sous-espace de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$

2. Soit $p\in\mathbb{N}$. Par linéarité de l'évaluation, $\boxed{\varphi \text{ est linéaire}}$: si $x,y\in\ell^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(x+\lambda y)=(x+\lambda y)_p=x_p+\lambda y_p$ (c'est la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire de suites).
   Puis, si $x\in\ell^2$,
   $$|\varphi(x)|=|x_p|=\sqrt{x_p^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}x_n^2}=\|x\|$$
   donc $\boxed{\varphi\in\mathscr{L}_c\left(\ell^2,\mathbb{R}\right).}$

3. Remarquons qu'on a bien, naturellement, $F\subset\ell^2$.
   Soit $x\in F^\perp$. Alors x est orthogonale aux suites de la base canonique $e^{(n)}=(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{n^{\text{e}}},0,\ldots)$ de F.
   Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(x\middle|e^{(n)}\right)=x_n=0$, ce qui conduit à $F^\perp\subset\{0\}$. Par ailleurs, $0\in F^\perp$, donc $\boxed{F^\perp=\{0\}.}$
   On a alors $\boxed{F\subsetneq\left(F^\perp\right)^\perp=\{0\}^\perp=\ell^2}$ (car il y a des suites dans ℓ^2 qui ne sont pas presque nulles, comme $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple.)

Exercice 40 : Analyse

Exercice 41 : Analyse

Exercice 42 : Analyse

Exercice 43 : Analyse

Exercice 44 : Analyse

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. **(a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.**
   (b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. **Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.**
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. **(a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.**
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

---

1. (a) $\boxed{x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \ x_n \to \ell.}$
   Autrement dit, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
   (b) $\boxed{\text{Supposons } A \subset B.}$
   - **Avec des suites** : Soit $x \in \overline{A}$. Alors x est limite d'une suite d'éléments de A qui est aussi une suite d'éléments de B, donc $x \in \overline{B}$. Ainsi, $\boxed{\overline{A} \subset \overline{B}.}$
   - **On peut aussi revenir à la définition** : si $x \in \overline{A}$, pour tout $r > 0$ $\varnothing \neq B(a,r) \cap A \subset B(a,r) \cap B$ donc $B(a,r) \cap B \neq \varnothing$ donc $x \in \overline{B}$. Ainsi, $\boxed{\overline{A} \subset \overline{B}.}$
   - **On peut utiliser la caractérisation** de l'adhérence comme étant le plus petit fermé contenant la partie : comme $\overline{B}$ est un fermé contenant B donc A, il est plus grand au sens de l'inclusion que $\overline{A}$ c'est-à-dire $\boxed{\overline{A} \subset \overline{B}.}$
2. On a déjà $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, donc, avec la question précédente, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Puis
   - **Avec la caractérisation** : $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$, donc le plus petit ensemble vérifiant cette propriété vérifie $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   - **Avec des suites** : si $x \in \overline{A \cup B}$, on a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (A \cup B)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.
     Soit les ensembles $\mathbb{N}_A = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in A\}$ et $\mathbb{N}_B = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in B\}$ vérifient $\mathbb{N}_A \cup \mathbb{N}_B = \mathbb{N}$. L'un d'entre eux au moins est donc infini.
     On peut alors, avec un tel ensemble infini, construire une extractrice φ dont l'image est exactement cet ensemble : $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_A$ ou $\{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_B$.
     On obtient alors $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ ou $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$, donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et, finalement, $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$
3. (a)
   - **Avec 1.b** : $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ donc $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.}$
   - **Avec la définition** : si $x \in \overline{A \cap B}$, pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A \cap B \neq \varnothing$ donc $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ et $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$ donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et on a bien $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.}$
   - **Avec la caractérisation** : $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ car $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$, donc $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.}$

   (b) Prenons $E = \mathbb{R}$, $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$. Alors $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Exercice 45 : Analyse

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. **(a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.**
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. **On pose $\forall x \in E$, $\mathrm{d}_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x-a\|$.**
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $\mathrm{d}_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $\mathrm{d}_A(tx+(1-t)y) \leqslant t\,\mathrm{d}_A(x) + (1-t)\,\mathrm{d}_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

---

1. (a) $\boxed{x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ \ x_n \to \ell.}$
   Autrement dit, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A.
   (b) Supposons A est convexe, et donnons-nous $x, y \in \overline{A}$ et $t \in [0,1]$.
   On a donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
   Alors $(x_n + ty_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ par convexité de A et $x_n + ty_n \to x + ty$ donc $x + ty \in \overline{A}$.
   En résumé, $\boxed{\overline{A} \text{ est convexe.}}$
2. (a) Soit $x \in E$ tel que $\mathrm{d}_A(x) = 0$.
   - **Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure** : on a $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que
     $$\|x - x_n\| \to \inf_{a\in A} \|x-a\| = \mathrm{d}_A(x) = 0,$$
     c'est-à-dire $x_n \to x$.
     Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $\boxed{x \in \overline{A}.}$
   - **Par caractérisation de la borne inférieure** : pour tout $r > 0$, on $a \in A$ tel que $\|x-a\| < r$ (r n'est pas un minorant de $\{\|x-a\|,\ a \in A\}$), autrement dit $a \in A \cap B(a,r) \neq \varnothing$ donc $\boxed{x \in \overline{A}.}$

   (b) On suppose que A est fermée et que $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $\mathrm{d}_A(tx+(1-t)y) \leqslant t\,\mathrm{d}_A(x) + (1-t)\,\mathrm{d}_A(y)$.
   On a se donne $x, y \in A$ et $t \in [0,1]$. On veut montrer que $x + ty \in A$.
   Comme $x, y \in A$, $\mathrm{d}_A(x) = \mathrm{d}_A(y) = 0$ donc $0 \leqslant \mathrm{d}_A(tx+(1-t)y) \leqslant t\cdot 0 + (1-t)\cdot 0$ donc $\mathrm{d}_A(tx+(1-t)y) = 0$.
   On en déduit avec la question précédente que $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
   Or A est fermée donc $A = \overline{A}$ donc $tx + (1-t)y \in A$.
   Finalement, on a bien montré que $\boxed{A \text{ est convexe.}}$

Exercice 46 : Analyse

Exercice 47 : Analyse

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

2. $\sum a_n x^n$ **avec** $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

---

1. La série entière étant lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général. Pour tout réel x, on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$. Pour x non nul,
$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{3nx^2}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|3x^2\right|$$
Donc, si $\left|3x^2\right| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument et si $\left|3x^2\right| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge. On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
On pose $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.
Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a $\forall t \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.
Ainsi $\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[,\ S(x) = -\ln\left(1-3x^2\right).}$

2. **Le corrigé officiel est particulièrement imprécis sur cet exemple.**
Posons les suites (b_n) et (c_n) telles que $b_n = a_{2p}$ si $n = 2p$ et 0 sinon, et $c_n = a_{2p+1}$ si $n = 2p+1$ et 0 sinon. Alors les séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence que $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ respectivement. Or
   - $\sum 4^n x^{2n} = \sum \left(4x^2\right)^n$ converge si et seulement si $\left|4x^2\right| < 1$ si et seulement si $|x| < \frac{1}{2}$: son rayon de convergence est $R_1 = \frac{1}{2}$.
   - $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = \sum \left(5x^2\right)^n$ converge si et seulement si $\left|5x^2\right| < 1$ si et seulement si $|x| < \frac{1}{\sqrt{5}}$: son rayon de convergence est $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

   Finalement, $\sum a_n x^n$ est la somme des séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ qui ont des rayons de convergence $R_1 \neq R_2$ donc celui de $\sum a_n x^n$ vaut $\boxed{R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}.}$
   Autre argument possible avec la sommabilité : les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux si et seulement si c'est le cas de $\sum a_n x^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N}+1)$). On en déduit que $R = \min(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Autre argument possible sans la sommabilité : $a_{2n} x^{2n} \to 0$ et $a_{2n+1} x^{2n+1} \to 0$ si et seulement si $a_n x^n \to 0$.
   D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles ou en utilisant une somme de séries entières)
$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[,\ S(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(4x^2\right)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(5x^2\right)^n = \boxed{\frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.}$$

Exercice 48 : Analyse

$\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. **Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.**
2. **Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.**
   (a) **Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.**
   (b) **Démontrer que $\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.**
   (c) **Calculer $\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.**
3. **En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.**

---

1. Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
2. On pose, pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, fonction continue sur un segment donc bornée, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
   (a) f et $P_n - f$ étant continues sur le segment $[0,1]$ donc bornées,
   $$\forall t \in [0,1],\ \left|P_n(t)f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)||P_n(t) - f(t)| \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty.$$
   On en déduit que
   $$\left\|P_n f - f^2\right\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \tag{1}$$
   Or (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc, d'après (1), $\|P_n f - f^2\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc $\boxed{(P_n f) \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f^2.}$
   (b) On utilise le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment :
   H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n f$ est continue sur $[0,1]$.
   H2 D'après la question précédente, $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   Donc $\boxed{\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.}$
   (c) $P \mapsto \int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ et $P \mapsto 0$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ donc elles sont égales. Ainsi, $\boxed{\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$
3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or f^2 est positive et continue sur $[0,1]$, donc f^2 est nulle sur $[0,1]$ et donc $\boxed{f \text{ est nulle sur } [0,1].}$

Exercice 49 : Analyse

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +\infty[, f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. **(a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.**
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. **(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.**

   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

---

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge vers e^x.

   (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement ; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc $\boxed{\text{elle est bornée.}}$

   Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

   (b) Soit $t \in [0, +\infty[$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leqslant M \dfrac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.

   On a donc vérifié la $\boxed{\text{convergence simple de } \sum f_n \text{ sur } [0, +\infty[.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $t^2 g_n(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $[0, +\infty[$.

   On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.

   En effectuant une intégration par parties, on prouve que $I_n = n I_{n-1}$. On en déduit par récurrence que $I_n = n! I_0 = n!$. Alors $\boxed{t \mapsto |f_n(t)| \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$ car $|f_n(t)| = \dfrac{|a_n|}{n!} g_n(t)$ et on a $\boxed{\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|.}$

   (b) On utilise le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

   H1 $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et a pour somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b) dont on a admis la continuité sur $[0, +\infty[$.

   H2 $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 2.(a)

   H3 $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = |a_n|$ terme général de série convergente par hypothèse.

   Alors f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

Exercice 50 : Analyse

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\,dt$.

1. **Prouver que** F **est définie et continue sur** $]0;+\infty[$.
2. **Prouver que** $x \longmapsto xF(x)$ **admet une limite en** $+\infty$ **et déterminer la valeur de cette limite.**
3. **Déterminer un équivalent, au voisinage de** $+\infty$, **de** $F(x)$.

---

1. Notons $f : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-2t}}{x+t} \end{array} \right.$

   On utilise le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

   H1 $\forall t \in [0;+\infty[,\ x \mapsto f(x,t) = \dfrac{e^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
   H2 $\forall x \in]0;+\infty[,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   H3 **Domination sur tout segment** Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$. $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in [0;+\infty[$,

   $$\left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a}e^{-2t} = \varphi(t)$$

   avec φ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$ car $2>0$.

   On en déduit que $\boxed{F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\,dt \text{ est définie et continue sur }]0;+\infty[.}$

2. $\forall x \in]0;+\infty[,\ xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}e^{-2t}\,dt$. Posons $\forall x \in]0;+\infty[,\ \forall t \in [0;+\infty[,\ h_x(t) = \frac{x}{x+t}e^{-2t}$.

   On utilise l'extension du théorème de convergence dominée appliquée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$:

   H1 $\forall t \in [0;+\infty[,\ h_x(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-2t} = h(t)$.
   H2 Toutes les fonctions h_x et la fonction h sont continues par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   H3 **Domination globale** $\forall x \in]0;+\infty[,\ \forall t \in [0;+\infty[,\ |h_x(t)| \leqslant e^{-2t} = h(t)$ et h est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_x(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}$.

   Conclusion : $\boxed{xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}.}$

3. Et donc $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}.}$

Autre méthode *(mais qui n'est pas attendue ici) : le changement de variable* $u = x+t$ *donne* $F(x) = e^{2x}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-2u}}{u}\,du$ *ce qui redonne existence et continuité.*

Puis, la dérivée de $u \mapsto \dfrac{e^{-2u}}{u}$ *valant* $u \mapsto -\dfrac{2u+1}{u^2}e^{-2u}$, *on « remarque » que*

$$\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2}e^{-2u},$$

donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x}\int_x^{+\infty}\frac{2u+1}{2u^2}e^{-2u}\,du = e^{2x}\left[-\frac{e^{-2u}}{2u}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ou alors on effectue une intégration par parties et on utilise un théorème d'intégration de o *dans le cas de convergence.*

D'où en particulier $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Exercice 51 : Analyse

1. **Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.**

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. **Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.**

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. **En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.**
4. **En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.**

---

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4(2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

   Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$
2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall u \in]-1,1[,\ (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} u^n.$$

   En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$, $R = 1$ et $\forall t \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n.$$

   En multipliant numérateur et dénominateur par $2\cdot 4\cdots 2n = 2^n n!$, on obtient

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

   Conclusion : $\boxed{R = 1 \text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n.}$
3. D'après la question précédente, en remarquant que $x \in]-1,1[\iff t = x^2 \in [0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

   avec un rayon de convergence $R = 1$.
   Or Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\operatorname{Arcsin}' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé. On obtient

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \operatorname{Arcsin} x = \underbrace{\operatorname{Arcsin} 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}}$$

   avec un $\boxed{\text{rayon de convergence } R = 1.}$
4. Prenons $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ dans le développement précédent. On en déduit que

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

   Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} = \frac{\pi}{3}.}$

Exercice 52 : Analyse

Exercice 53 : Analyse

Exercice 54 : Analyse

Exercice 55 : Analyse

Exercice 56 : Analyse

Exercice 57 : Analyse

Exercice 58 : Analyse

II Algèbre : exercices 59 à 94

Exercice 59 : Algèbre

Exercice 60 : Algèbre

Exercice 61 : Algèbre

Exercice 62 : Algèbre

Exercice 63 : Algèbre

Exercice 64 : Algèbre

Exercice 65 : Algèbre

Exercice 66 : Algèbre

Exercice 67 : Algèbre

Exercice 68 : Algèbre

Exercice 69 : Algèbre

Exercice 70 : Algèbre

Exercice 71 : Algèbre

Exercice 72 : Algèbre

Exercice 73 : Algèbre

Exercice 74 : Algèbre

Exercice 75 : Algèbre

Exercice 76 : Algèbre

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. **(a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. **Soit $E = \left\{f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\right\}$. Prouver que l'ensemble**

$$\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

---

1. (a) On montre que $\boxed{\text{pour tout } (x,y) \in E^2,\ |(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\| \text{ ie } (x|y)^2 \leqslant (x|x)(y|y).}$

   Soit λ un nombre réel. On pose $P(\lambda) = \left(x+\lambda y\,|x+\lambda y\right) = \|x+\lambda y\|^2$: on a que $P(\lambda) \geqslant 0$ par positivité. Or, par bilinéarité (ou identité remarquable sur la norme)

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= (x|x) + \lambda(x|y) + \lambda(y|x) + \lambda^2(y|y)\\ &= (x|x) + 2\lambda(x|y) + \lambda^2(y|y)\\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(x|y) + \lambda^2\|y\|^2\end{aligned}$$

   P est un polynôme de degré au plus 2 à coefficients réels.

   Cas 1 : Si $\|y\|^2 = (y|y) = 0$, alors on doit avoir, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x|x) + 2\lambda(x|y) \geqslant 0$, ce qui n'est possible que si $(x|y) = 0$ (en effet, cela se voit en faisant tendre $\lambda \to \pm\infty$ si $(x|y) \neq 0$ ce qui aboutit à une contradiction ou en reconnaissant une équation de droite dont les ordonnées seraient toutes positive, elle est donc horizontale et de cœfficient directeur nul) et l'inégalité est vraie. Cette preuve a l'avantage d'être valable pour une forme bilinéaire symétrique seulement positive.
   On peut aussi plus simplement utiliser la défini-positivité du produit scalaire : $y = 0_E$ et donc l'inégalité s'écrit $0 = 0$.

   Cas 2 : Sinon, le polynôme en λ est de degré 2 de signe constant donc son discriminant réduit est négatif

$$\Delta' = (x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leqslant 0$$

   et on obtient l'inégalité recherchée.
   Si on n'est pas familier avec le discriminant réduit, on peut utiliser le discriminant classique

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leqslant 0.$$

   (b) Il y a $\boxed{\text{égalité si et seulement si } (x,y) \text{ est une famille liée.}}$

   En effet
   - Si $y = 0_E$, il y a égalité.
   - Si $y \neq 0_E$, il y a égalité si et seulement si $P(\lambda)$ admet une racine (double) si et seulement si $\exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \left(x+\lambda y\,|x+\lambda y\right) = 0$, ce qui équivaut à $\exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ x+\lambda y = 0$ et donc x et y sont liés.

2. $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est bien un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.

   Par inégalité de Cauchy-Schwarz, si $f \in E$, $\sqrt{f}, \dfrac{1}{\sqrt{f}} \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b 1\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \times \frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

   donc $(b-a)^2$ est un minorant de $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,\ f \in E\right\}$, atteint pour $f \equiv 1$, donc $\boxed{m = (b-a)^2}$ (qui est même un minimum en plus d'une borne inférieure.)

Exercice 77 : Algèbre

Soit E un espace euclidien.

1. **Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.**
2. **Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.**
   (a) **Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.**
   (b) **Démontrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.**

---

1. Si $x \in A^\perp$ et $a \in A$, alors $(x|a) = 0$, donc $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.
   Comme A et $A^\perp$ sont de dimension finie, $A \oplus A^\perp = E$ et $A^\perp \oplus \left(A^\perp\right)^\perp = E$ donc
   $$\dim\left(A^\perp\right)^\perp = \dim E - \dim A^\perp = \dim A$$
   Finalement, $\boxed{(A^\perp)^\perp = A.}$
2. (a)
   - Comme $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a déjà $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
   - Si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, $y \in F$ et $z \in G$, alors
   $$(\underbrace{x}_{\in F^\perp\cap G^\perp} \mid \underbrace{y+z}_{\in F+G}) = (\underbrace{x}_{\in F^\perp} \mid \underbrace{y}_{\in F}) + (\underbrace{x}_{\in G^\perp} \mid \underbrace{z}_{\in G}) = 0$$
   donc $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.
   - Finalement, $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.}$

   Remarque : Cette égalité et cette démonstration sont encore valables en dimension infinie.

   (b) En appliquant la question précédente à $F^\perp$ et $G^\perp$ et en utilisant la première question,
   $$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp = F\cap G$$
   donc, en prenant l'orthogonal et en réutilisant la première question, $\boxed{(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.}$

   Remarque : Une seule inclusion reste vraie en dimension infinie.

Exercice 78 : Algèbre

Exercice 79 : Algèbre

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. **Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   Démontrer que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. **Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.**
   On pose $\forall (f, g) \in E^2$, $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. **Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

---

1. Supposons $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. Soit H une primitive de la fonction continue h. Alors $H' = h \geqslant 0$ donc H est croissante et $H(b) - H(a) = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ donc H est constante sur $[a, b]$: $\forall x \in [a, b]$, $\quad H(a) \leqslant H(x) \leqslant H(b) = H(a)$.
   Alors, sur $[a, b]$, $h = H' \equiv 0$.
   Donc $\boxed{\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0.}$
2. **Bonne définition** Si $f, g \in E$, le réel $(f|g)$ est bien défini.
   Symétrie Si $f, g \in E$, $(f|g) = (g|f)$ par commutativité du produit réel.
   Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$ par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.
   Défini-positivité
   - Si $f \in E$, $(f|f) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ;
   - et si $(f|f) = 0$, alors, comme f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a, b]$, elle y est nulle et donc $f = 0_E$.

   Donc $\boxed{(\cdot|\cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$
3. Par inégalité de Cauchy-Schwarz, en notant $f = \sqrt{\cdot}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ fonctions continues sur $[0, 1]$,
   $$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x = (f|g) \leqslant \|f\|\,\|g\| = \sqrt{\int_0^1 x\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 e^{-2x}\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{\sqrt{2}}$$
   donc $\boxed{\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}.}$

Exercice 80 : Algèbre

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. **Démontrer que** $(f\,|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ **définit un produit scalaire sur** E.
2. **Soit** F **le sous-espace vectoriel engendré par** $f : x \mapsto \cos x$ **et** $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F **de la fonction** $u : x \mapsto \sin^2 x$.

---

1. **Bonne définition** Si $f, g \in E$, elles sont continues sur $[0, 2\pi]$ et le réel $(f|g)$ est bien défini.
   Symétrie Si $f, g \in E$, $(f|g) = (g|f)$ par commutativité du produit réel.
   Bilinéarité Si $f_1, f_2, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f_1 + \lambda f_2|g) = (f_1|g) + \lambda(f_2|g)$ par linéarité de l'intégrale, ce qui donne la linéarité à gauche. La linéarité à droite en découle par symétrie.
   Défini-positivité
   - Si $f \in E$, $(f|f) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale ;
   - et si $(f|f) = 0$, alors, comme f^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, elle y est nulle et donc, par 2π-périodicité, $f = 0_E$.
2. $F = \mathrm{Vect}\big(f : x \mapsto \cos x, g : x \mapsto \cos(2x)\big)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie donc le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$ est bien défini.
   Il s'agit de l'unique fonction $h \in F$ telle que $u - h \in F^\perp$.
   Or, par une célèbre formule de trigonométrie

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad ie \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

donc $u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \frac{1}{2}$.

Vérifions alors que la fonction constante $\frac{1}{2}$ est dans $F^\perp$.

$$\left(\frac{1}{2}\middle|f\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\middle|g\right) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Donc $u = \underbrace{-\frac{g}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in F^\perp}$ et $\boxed{p_F(h) = -\frac{g}{2}.}$

Exercice 81 : Algèbre

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}(A^\top A')$, où $\operatorname{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'. On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.**
3. **Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.**
4. **Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.**

On a classiquement $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}\left(I_2, K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Comme $\mathcal{F}$ est un sous-espace de dimension 2 (I_2 et K sont non colinéaires) en dimension 4, $\mathcal{F}^\perp$ est aussi de dimension 2.
   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^\perp$ si et seulement si $\varphi(A, I_2) = \varphi(A, K) = 0$ si et seulement si $a + d = 0 = b - c$.
   Donc $\mathcal{F}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{Vect}\left(M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et comme M et N ne sont pas colinéaires,
   $\boxed{\left(M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathcal{F}^\perp.}$
3. Comme $J = I_2 + N$ avec $I_2 \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{F}^\perp$, $\boxed{p_{\mathcal{F}^\perp}(J) = N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$
4. D'après le cours (et le théorème de Pythagore), $\operatorname{d}(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|p_{\mathcal{F}^\perp}(J)\| = \|N\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2}$ donc $\boxed{\operatorname{d}(J, \mathcal{F}) = \sqrt{2}.}$

Exercice 82 : Algèbre

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n>0$.

On admet que, pour tout $x\in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x-y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x-y_0\|$.

Pour $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$, on pose $(A\,|\,A')=aa'+bb'+cc'+dd'$.

1. **Démontrer que $(\cdot\,|\,\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. **Calculer la distance de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.**

---

1. **Bonne définition** Si $A, A'\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le réel $(A\,|\,A')$ est bien défini sans problème.
   Symétrie Si $A, A'\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A\,|\,A')=(A'\,|\,A)$ par commutativité du produit réel.
   Bilinéarité Si $A_1, A_2, A'\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $(A_1+\lambda A_2\,|\,A')=(A_1\,|\,A')+\lambda(A_2\,|\,A')$ en remplaçant directement dans l'expression. D'où la linéarité à gauche, la linéarité à droite en découle par symétrie.
   Défini-positivité
   - Si $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A\,|\,A)=a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant 0$;
   - et si $(A\,|\,A)=0$, alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs, $a^2=b^2=c^2=d^2=0$ et donc $A=0_2$.
2. On écrit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\in F^{\perp}$ car elle est orthogonale à toute matrice triangulaire supérieure.
   Alors $\boxed{\mathrm{d}(A,F)=\left\|A-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\|=1.}$

Exercice 83 : Algèbre

Exercice 84 : Algèbre

Exercice 85 : Algèbre

Exercice 86 : Algèbre

Exercice 87 : Algèbre

Exercice 88 : Algèbre

Exercice 89 : Algèbre

Exercice 90 : Algèbre

Exercice 91 : Algèbre

Exercice 92 : Algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A,B) \in E^2$, $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$ où tr désigne la trace et $A^\top$ désigne la transposée de la matrice A.

1. **Prouver que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.**
2. **On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.**
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^\top = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) **Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.**
   (b) **Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.**
3. **Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.**

---

1. On peut soit utiliser les propriétés de la trace sur la première forme $\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$, soit écrire une deuxième forme
$$\langle A,B\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left[A^\top B\right]_{j,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[A^\top\right]_{j,i} b_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}$$
et rédiger comme avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Bonne définition Quelle que soit le forme de $\langle A,B\rangle$, si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\langle A,B\rangle$ est bien défini sans problème.

Symétrie Si $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$ par commutativité du produit réel avec la deuxième forme. Avec la première forme, on peut écrire
$$\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^\top B\right)^\top\right) = \operatorname{tr}\left(B^\top A\right) = \langle B,A\rangle.$$

Bilinéarité Si $A,B,B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec la première forme, la linéarité à droite découle de celle de la trace :
$$\langle A,B+\lambda B'\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top (B+\lambda B')\right) = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right) + \lambda \operatorname{tr}\left(A^\top B'\right) = \langle A,B\rangle + \lambda\langle A,B'\rangle.$$
Avec la seconde forme,
$$\langle A,B+\lambda B'\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\left(b_{i,j}+\lambda b'_{i,j}\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j} + \lambda \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b'_{i,j} = \langle A,B\rangle + \lambda\langle A,B'\rangle.$$
Ensuite, comme toujours, la linéarité à gauche en découle par symétrie.

Défini-positivité Cette fois, difficile de se passer de la seconde forme. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\langle A,A\rangle = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$;
- et si $\langle A,A\rangle = 0$, alors, comme il s'agit d'une somme nulle de termes réels positifs, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j}^2 = 0$ et donc $A = 0_n$.

Donc $\boxed{\langle \cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

2. (a) Remarquons que le résultat découle de la question suivante (car $A_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie) mais ce n'est pas la logique de l'énoncé.
Le plus rapide pour obtenir cette supplémentarité classique est d'utiliser une symétrie.
$T : M \mapsto M^\top$ est involutive ($T\circ T = \mathrm{id}_E$) et linéaire : il s'agit donc d'une symétrie sur $\operatorname{Ker}(T-\mathrm{id}_E) = S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(T+\mathrm{id}_E) = A_n(\mathbb{R})$. On a donc $\boxed{E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R}).}$
Remarque : On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour trouver explicitement l'unique décomposition d'une matrice en partie symétrique et partie antisymétrique, ou alors utiliser un argument de dimension et le fait que l'intersection soit réduite à la matrice nulle, mais c'est (un peu) plus long et moins élégant. De plus, notre argument justifie aussi le fait qu'on ait des sev même si c'est admis par l'énoncé.
(b) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Alors $\langle S,A\rangle = \operatorname{tr}\left(S^\top A\right) = \operatorname{tr}(SA)$ d'une part, et, d'autre part
$$\langle S,A\rangle = \langle A,S\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top S\right) = -\operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(SA) = -\langle S,A\rangle$$
donc $\langle S,A\rangle = 0$ et, par suite, $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^\perp$.
On conclut avec les dimensions : $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim E - \dim A_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^\perp$ par la question précédente et la supplémentarité de $A_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})^\perp$.
Donc $\boxed{A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R}).}$

3. En utilisant une base de F constituée de matrices élémentaires et la deuxième forme,
$$M \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle M, E_{i,i}\rangle \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} = 0$$
Donc $\boxed{F^\perp \text{ est l'ensemble des matrices de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ à diagonale nulle.}}$

Exercice 93 : Algèbre

Exercice 94 : Algèbre

III Probabilités : exercices 95 à 112

Exercice 95 : Probabilités

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. **Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.**
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) **Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.**
   (b) **Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.**
2. **Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément 5 boules dans l'urne.**
   (a) **Déterminer la loi de X.**
   (b) **Déterminer la loi de Y.**

---

1. (a) Il s'agit d'une répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours, $\boxed{X \sim \mathscr{B}(5,p),\ \mathbb{E}(X) = 5p = 1 \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}.}$

   (b) $Y = 2X - 3(5-X) = 5X - 15$. Donc $\boxed{Y(\Omega) = \{5k-15, k \in [\![0,5]\!]\}}$ et, si $k \in [\![0,5]\!]$,
   $$\boxed{\mathbb{P}(Y = 5k-15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\frac{4^{5-k}}{5^5}.}$$
   De plus, par linéarité, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10}$ et $\boxed{\mathbb{V}(Y) = 5^2\mathbb{V}(X) = 20.}$

2. (a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0,2]\!]}$ et en prenant comme modèle $\Omega = \mathscr{P}_5(\mathscr{B})$ (parties à 5 éléments) où $\mathscr{B}$ est l'ensemble des boules, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ uniforme, avec $|\Omega| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(5!)^2}$:
   - $(X = 0)$ est le cas où il n'y a que des boules noires (5 parmi 8) donc
   $$\boxed{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5! \cdot 8!}{3! \cdot 10!} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \boxed{\frac{2}{9}}$$
   - $(X = 1)$ est le cas où il n'y a qu'une seule boule blanche parmi 2 et 4 boules noires parmi 8 donc
   $$\boxed{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{2 \cdot \binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2 \cdot (5!)^2 \cdot 8!}{(4!)^2 \cdot 10!} = \frac{2 \cdot 25}{9 \cdot 10} = \boxed{\frac{5}{9}}$$
   - $(X = 2)$ est le cas où il n'y a les deux boules blanches, il n'y a donc à choisir que 3 boules noires parmi 8 donc
   $$\boxed{\mathbb{P}(X=2)} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \mathbb{P}(X=0) = \boxed{\frac{2}{9}}$$
   ou alors $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$.

   (b) On a toujours $Y = 5X - 15$. Donc $\boxed{Y(\Omega) = \{-15, -10, -5\}}$ et
   $$\boxed{\mathbb{P}(Y=-15) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{2}{9}} \qquad \boxed{\mathbb{P}(Y=-10) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{5}{9}} \qquad \boxed{\mathbb{P}(Y=-5) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{2}{9}}$$

Exercice 96

Exercice 97 : Probabilités

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\left((X,Y)=(j,k)\right)=\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. **Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?**
2. **Prouver que $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.**

---

1. D'après l'énoncé, $\boxed{X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}.}$
   Soit $j\in\mathbb{N}$. Par application de la formule des probabilités totales au système complet d'événements $((Y=k))_{k\in\mathbb{N}}$, on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=j) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=j,Y=k\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(j+k)}{\mathrm{e}\, j!\, k!\, 2^{j+k}}\\ &= \frac{1}{\mathrm{e} j!2^j}\left(j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!2^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!2^k}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{e} j!2^j}\left(j+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1/2)^k}{k!}\\ &= \frac{2j+1}{\mathrm{e} j!2^{j+1}}\mathrm{e}^{1/2}\\ &= \frac{2j+1}{\sqrt{\mathrm{e}}\, j!2^{j+1}}\end{aligned}$$

   en reconnaissant des séries exponentielles donc convergentes et en démarrant l'indice de la deuxième somme à 1 pour ne pas écrire de factorielle de nombre strictement négatif, le terme pour $k=0$ étant nul.

   Ainsi, par symétrie des rôles, $\boxed{\forall\,(j,k)\in[\![1,n]\!]^2,\ \ \mathbb{P}(X=j)=\frac{2j+1}{\sqrt{\mathrm{e}}\, j!2^{j+1}}\text{ et }\mathbb{P}(Y=k)=\frac{2k+1}{\sqrt{\mathrm{e}}k!2^{k+1}}.}$

   On remarque que $\mathbb{P}((X,Y)=(0,0))=0\neq\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$ donc $\boxed{X\text{ et }Y\text{ ne sont pas indépendantes.}}$

2. L'espérance $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]$ de la variable aléatoire 2^{X+Y} réelle positive existe toujours dans $[0,+\infty]$.
   Montrons qu'elle est finie et calculons sa valeur.
   Par la formule de transfert puis symétrie des rôles, dans $[0,+\infty]$,

$$\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]=\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\mathbb{P}((X,Y)=(j,k))2^{j+k}=\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{j+k}{j!k!}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{j}{j!k!}+\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}\frac{k}{j!k!}\right)=\frac{2}{\mathrm{e}}\sum_{j\in\mathbb{N}^2}\frac{j}{j!k!}$$

   Par théorème sur le sommes doubles produits dans le cas positif,

$$\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right]=\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)=\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right)=2\mathrm{e}<+\infty$$

   Donc $\boxed{2^{X+Y}\text{ est d'espérance finie égale à }2\mathrm{e}.}$

Exercice 98 : Probabilités

Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p (où $p \in]0,1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. **Donner la loi de X. Justifier.**
2. **Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.**
   (a) **Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k \mid X=i)$.**
   (b) **Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.**

   Indication **: on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.**

   (c) **Déterminer l'espérance et la variance de Z.**

---

1. Il s'agit d'une répétition de n expériences de Bernoulli de même paramètre p indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours, $\boxed{X \sim \mathscr{B}(n,p).}$
2. (a) En supposant l'événement $(X=i)$ réalisé, on se retrouve de nouveau dans une situation de nombre de succès de $n-i$ expériences de Bernoulli de même paramètre p indépendantes. Donc, pour la probabilité conditionnelle $P_{(X=i)}$, Y suit une loi binomiale de paramètre $(n-i,p)$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k \mid X=i) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}}$ (qui est nul si $k > n-i$).

   (b) Z correspondant au nombre total de correspondant ayant répondu, $\boxed{Z(\Omega) = [\![0,n]\!].}$ Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
   En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X=i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ associé à X,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Z=k \mid X=i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i \mid X=i) && \text{On a } 0 \leqslant X \leqslant k \text{ et } Y = Z-X.\\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} && \text{Formule admise.}\\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \cdot 1^{k-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)^k && \text{Binôme de Newton.}\\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

   avec $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$. Donc $\boxed{Z \sim \mathscr{B}(n, p(2-p)).}$

   (c) D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(X) = np(2-p)}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = np(2-p)(1-p)^2.}$

Remarque : pour prouver la formule admise imaginons devoir choisir dans une ville de n habitants, k conseillers municipaux et, parmi ces conseillers, i adjoints.

- *On peut choisir d'abord les k conseillers parmi n habitants de $\binom{n}{k}$ manières différentes puis i adjoints parmi les k conseillers de $\binom{k}{i}$ manières différentes ce qui laisse au total $\binom{k}{i}\binom{n}{k}$ choix possibles.*
- *On peut aussi choisir d'abord les i adjoints parmi n habitants de $\binom{n}{i}$ manières différentes puis $k-i$ autres conseillers parmi les $n-i$ habitants restant de $\binom{n-i}{k-i}$ manières différentes ce qui laisse au total $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}$ choix possibles.*

On a compté deux fois la même chose, d'où la formule.

Exercice 99 : Probabilités

1. **Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.**
2. **Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n \in L^2$.**
   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que
$$\forall\, a \in]0,+\infty[,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$
3. **Application**
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0{,}35$ et $0{,}45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^e tirage.

---

1. **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
   Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2, $a > 0$.
$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$
   c'est-à-dire, en notant m l'espérance de X et σ son écart-type,
$$\mathbb{P}\left(|X - m| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2}$$
2. **Loi faible des grands nombres**
   On remarque que, comme les Y_n sont identiquement distribuées,
   - par linéarité, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}(Y_1)$;
   - par indépendance, $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2} = \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{n}$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}.$$
3. **Application**
   On considère la suite (Y_n) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_n mesure l'issue du n^e tirage : $Y_n(\omega) = 1$ si la n^e boule tirée est rouge, 0 sinon. Ainsi, dans notre contexte, $Y_n \sim \mathscr{B}\left(\frac{2}{5}\right)$ est les Y_n sont indépendantes car les tirages le sont, $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{5} = 0{,}4$ et $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.
   On cherche n tel que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0{,}4\right| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant 0{,}05$.
   D'après la question précédente, il suffit de choisir n tel que $\frac{6/25}{n \cdot 0{,}05^2} \leqslant 0{,}05$ c'est-à-dire
$$\boxed{n \geqslant \frac{6/25}{(1/20)^3} = 6 \cdot 4^2 \cdot 20 = 1920.}$$

Exercice 100 : Probabilités

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n)=\frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. **Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x)=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.**
2. **Calculer λ.**
3. **Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.**
4. **X admet-elle une variance ? Justifier.**

---

1. Par la méthode habituelle, on trouve $R(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$ avec $a=\dfrac{1}{(0+1)(0+2)}=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{(-1)(-1+2)}=-1$ et $c=\dfrac{1}{(-2)(-2+1)}=\dfrac{1}{2}$.
2. On cherche λ tel que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}=1$. Or, par télescopage,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)-0=\frac{1}{4}.$$

   Donc $\boxed{\lambda=4}$.
3. Comme X est à valeurs réelles positives, elle admet une espérance dans $[0,+\infty]$. On va montrer qu'elle est finie et la calculer.
   Dans $[0,+\infty]$, on calcule par décomposition en éléments simples et télescopage

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n}{n(n+1)(n+2)}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{1+1}-0\right)<+\infty$$

   Donc $\boxed{X \text{ est d'espérance finie égale à } 2.}$
4. On cherche à savoir si $X\in L^2$ c'est-à-dire, par théorème de transfert, si $(\mathbb{P}(X=n)n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable c'est-à-dire si la série de terme général $\mathbb{P}(X=n)n^2=\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente.
   Or $0\leqslant\dfrac{4n}{(n+1)(n+2)}\sim\dfrac{4}{n}$ est un terme général de série divergente, donc $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

Exercice 101 : Probabilités

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n l'événement «l'animal est en A après son n^e trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son n^e trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son n^e trajet».

On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

1. **(a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.**
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. **On considère la matrice** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. **Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.**
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

---

1. (a) (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

   donc $a_{n+1} = 0a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $\boxed{a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n.}$

   (b) De même, $\boxed{b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}c_n}$ et $\boxed{c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n.}$

2. (a) A est symétrique à coefficients réels, donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$

   (b) $\operatorname{rg}\left(A + \frac{1}{2}\mathrm{I}_3\right) = \operatorname{rg}\left(\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1$, donc $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est valeur propre de } A}$ et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A) = 2$.
   Comme dans cette matrice, les colonnes vérifient $C_1 - C_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $C_2 - C_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \in E_{-\frac{1}{2}}(A)$ et sont indépendant donc $\boxed{E_{-\frac{1}{2}}(A) = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right).}$

   Remarque : On peut aussi résoudre le système $\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \iff x + y + z = 0 \iff z = -x - y.$

   (c) Puisque $-\frac{1}{2}$ et valeur propre double de A et $\operatorname{tr}(A) = 0$, on en déduit que 1 est une valeur propre simple de A. Or $A - I_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ vérifie $C_1 + C_2 + C_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ donc $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in E_1(A)$.
   On aurait aussi pu voir directement sur A que $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ce qui donne directement la valeur propre 1 et un vecteur propre associé.
   Ainsi $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ est une base diagonalisante de A : on pose $\boxed{P = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{smallmatrix}\right)}$, et on a alors $D = P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{smallmatrix}\right)$ et donc, par récurrence (suite géométrique),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Exercice 102 : Probabilités

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. **Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.**
2. **On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$ c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, $\min$ désignant « le plus petit élément de ».**
   (a) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.**
   (b) **Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.**

---

1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   En interprétant X_i comme loi d'un premier succès dans la répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p ce qui ne nuit pas à la généralité car les probabilités demandées ne dépendant que de la loi de X_i, l'événement $(X_i > n)$ correspond à avoir n échecs sur les n premières répétitions donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(X_i > n) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(X_i \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X_i > n) = 1 - q^n.}$$

   Notons que les résultats restent valables pour $n = 0$.
   Cela se retrouve par le calcul :

   $$P(X_i \leqslant n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p\sum_{k=0}^{n-1} q^k = p\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$$

   puis $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leqslant n) = q^n$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par indépendance et avec la question précédente,

   $$\boxed{\mathbb{P}(Y > n)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}(X_i > n)\right) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i > n) = \boxed{q^{nN}.}$$

   Donc $\boxed{P(Y \leqslant n)} = 1 - \mathbb{P}(Y > n) = \boxed{1 - q^{nN},}$ puis

   $$\boxed{P(Y = n)} = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = \boxed{q^{(n-1)N}\left(1 - q^N\right).}$$

   (Calcul encore valable si $n = 1$.)

   (b) Avec $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on reconnaît $\boxed{Y \sim \mathscr{G}\left(1 - q^N\right).}$

   D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}.}$

Exercice 103 : Probabilités

Remarque **: les questions 1. et 2. sont indépendantes.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. **(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.**
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. **Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.**
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

---

1. (a) On a $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n-k) \underset{X_1 \perp\!\!\!\perp X_2}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\end{aligned}$$

   par la formule du binôme de Newton. Donc $\boxed{X_1 + X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2).}$

   (b) D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2}$ (ce qui se retrouve linéarité de l'espérance et indépendance, respectivement.)

2. On a déjà $X(\Omega) = \mathbb{N}$. soit $n \in \mathbb{N}$.
   En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((Y = m))_{m \in \mathbb{N}}$ associé à Y,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n \mid Y = m) \cdot \mathbb{P}(Y = m) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} && \text{probabilité nulle si } n > m \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-n}}{(m-n)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} && \text{série exponentielle} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^n}{n!}\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{X \sim \mathscr{P}(\lambda p).}$

Exercice 104 : Probabilités

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules.
Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. **Préciser les valeurs prises par X.**
2. (a) **Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X=2)$.**
   (b) **Finir de déterminer la loi de probabilité de X.**
3. (a) **Calculer $\mathbb{E}(X)$.**
   (b) **Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to +\infty$. Interpréter ce résultat.**

---

1. $\boxed{X(\Omega)=\{0,1,2\}.}$
2. **Première méthode**
   (a) On modélise l'expérience avec $\Omega=\{1,2,3\}^n$, $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ probabilité uniforme.
   Alors $(X=2)=\{(1,\dots,1),(2,\dots,2),(3,\dots,3)\}$ et $\boxed{\mathbb{P}(X=2)}=\dfrac{|(X=2)|}{|\Omega|}=\dfrac{3}{3^n}=\boxed{\dfrac{1}{3^{n-1}}.}$
   (b) Alors $(X=1)$ contient tous les n-uplets composés d'exactement 2 valeurs. Il y a
   - 3 choix possibles pour la valeur qui n'apparaît pas,
   - puis 2^n-2 choix possibles pour toutes les composantes : 2 pour chacune mais il faut enlever les 2 cas où il n'y aurait qu'une seule des deux valeurs, comptée dans le cas $(X=2)$.

   Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(X=1)}=\dfrac{|(X=1)|}{|\Omega|}=\dfrac{3\left(2^n-2\right)}{3^n}=\boxed{\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}}$ et $\boxed{\mathbb{P}(X=0)}=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=2)=\boxed{\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.}$

   Deuxième méthode
   (a) Notons, pour $i\in[\![1,n]\!]$, B_i la variable aléatoire du numéro du compartiment dans lequel se trouve la boule numéro i. Les B_i sont des vaiid de loi uniforme sur $\{1,2,3\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=2)&=\mathbb{P}(B_1=1,\dots,B_n=1)+\mathbb{P}(B_1=2,\dots,B_n=2)+\mathbb{P}(B_1=3,\dots,B_n=3)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i=1)+\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i=2)+\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i=3) && \text{indépendance}\\
&=3\left(\frac{1}{3}\right)^n && \text{le 3 correspond aussi au choix du compartiment non vide}
\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{3^{n-1}}.}$
   (b) Pour le cas $(X\geqslant 1)=(X=1)\sqcup(X=2)$, il y a trois choix possibles pour le compartiment restant vide.
   On peut faire une disjonction de cas suivant le nombre $k\in[\![1,n-1]\!]$ de boules allant dans le compartiment non vide de numéro minimal. La compartiment vide étant fixé, il y $\dbinom{n}{k}$ choix possibles des boules dans le premier compartiment non vide. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=1)=3\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^k}_{1^{\text{er}}\text{ comp.}}\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}}_{2^{\text{e}}\text{ comp.}}=\frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-2\right)$$

   donc $\boxed{\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}}$ et $\boxed{\mathbb{P}(X=0)}=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=2)=\boxed{\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}.}$
3. (a) $\boxed{\mathbb{E}(X)}=0\cdot\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)=\boxed{\dfrac{2^n}{3^{n-1}}=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n.}$
   (b) et donc $\boxed{\mathbb{E}(X)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.}$
   Lorsque le nombre de boule devient très grand, en moyenne, aucun compartiment ne restera vide.

Exercice 105 : Probabilités

1. **Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.**
2. **On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).**
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) **On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.**
   On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.**
   On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) **Déterminer la limite de (p_n). Interpréter ce résultat.**

---

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   Si B est un événement non négligeable et si $(A_i)_{i\in I}$ (où I est fini ou dénombrable) est un système complet ou quasi-complet d'événements non négligeables, on a

$$\boxed{\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.}$$

   Preuve : Soit $i \in I$.

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

   en appliquant au dénominateur la formule des probabilités totales avec le système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$.

2. (a) Notons T l'événement « le dé choisi est pipé » et A l'événement « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $\mathbb{P}(T \mid A)$.
   Le système $\left(T, \overline{T}\right)$ est un système complet d'événements non négligeables, avec $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $\mathbb{P}\left(\overline{T}\right) = \frac{3}{4}$. Alors, d'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(T \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid T)\mathbb{P}(T)}{P(A \mid T)P(T) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{T}\right)\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

   donc $\boxed{\mathbb{P}(T \mid A) = \frac{1}{2}.}$

   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'événement « on obtient le chiffre 6 au k^{e} lancer » et on pose $B = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On cherche à calculer $p_n = \mathbb{P}(T \mid B)$.
   Toujours avec le système complet d'événements $\left(T, \overline{T}\right)$, d'après la formule de Bayes,

$$p_n = \mathbb{P}(T \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid T)\mathbb{P}(T)}{P(B \mid T)P(T) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{T}\right)\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

   Donc $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.}$

   (c) Donc $\boxed{p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$ Cela signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de très fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

Exercice 106 : Probabilités

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=pq^k$$

où $p \in]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. **Déterminer la loi du couple (U,V).**
2. **Déterminer la loi marginale de U.**
   On admet que $V(\Omega)=\mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(V=n)=pq^{2n}(1+q)$.
3. **Prouver que $W=V+1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.**
4. **U et V sont-elles indépendantes ?**

---

1. On a $\boxed{(U,V)(\Omega)=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ 0\leqslant j\leqslant i\}.}$
   Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ tel que $0\leqslant j<i$. Alors

   $$\mathbb{P}((U,V)=(i,j))=\mathbb{P}(U=i,V=j)=\mathbb{P}(X=i,Y=j)+\mathbb{P}(X=j,Y=i)$$

   par disjonction de cas, le fait que $i\neq j$ assure que ces cas sont bien disjoints.
   Par indépendance, symétrie des rôles et définition des lois de X et Y,

   $$\mathbb{P}((U,V)=(i,j))=2\left(pq^i\right)\left(pq^j\right)=2p^2q^{i+j}$$

   Lorsque $i=j$,

   $$\mathbb{P}((U,V)=(i,i))=\mathbb{P}(X=i,Y=i)=\left(pq^i\right)^2=p^2q^{2i}$$

   Finalement,

   $$\boxed{\mathbb{P}((U,V)=(i,j))=\begin{cases}2p^2q^{i+j} & \text{si } 0\leqslant j<i;\\ p^2q^{2i} & \text{si } i=j;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}}$$

2. On a $\boxed{U(\Omega)=\mathbb{N}}$ et, si $i\in\mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((V=j))_{j\in\mathbb{N}}$ associé à V,

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=i)&=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(U=i,V=j)=\sum_{j=0}^{i-1}2p^2q^{i+j}+p^2q^{2i}\\&=2p^2q^i\sum_{j=0}^{i-1}q^j+p^2q^{2i}\\&=2p^2q^i\frac{1-q^i}{1-q}+p^2q^{2i}\\&=2pq^i\left(1-q^i\right)+p^2q^{2i}\\&=\left(2-2q^i+pq^i\right)pq^i\\&=\left(2-2q^i+(1-q)q^i\right)pq^i\end{aligned}$$

   donc $\boxed{\mathbb{P}(U=i)=\left(2-2q^i+pq^i\right)pq^i=pq^i\left(2-q^i+q^{i+1}\right).}$

3. On a $W(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et si $n\in\mathbb{N}^*$,

   $$\mathbb{P}(W=n)=\mathbb{P}(V=n-1)=pq^{2(n-1)}(1+q)=\left(q^2\right)^{n-1}(1-q)(1+q)=\left(1-\left(1-q^2\right)\right)^{n-1}\left(1-q^2\right)$$

   donc $\boxed{W\sim\mathcal{G}\left(1-q^2\right).}$ D'après le cours, $\mathbb{E}(W)=\dfrac{1}{1-q^2}=\mathbb{E}(V)+1$ et donc $\boxed{\mathbb{E}(V)=\dfrac{q^2}{1-q^2}.}$

4. $\mathbb{P}((U,V)=(0,1))=0\neq\mathbb{P}(U=0)\mathbb{P}(V=1)$ donc $\boxed{U\not\perp\!\!\!\perp V.}$

Exercice 107 : Probabilités

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

- **L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.**
- **L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.**

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

- **On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.**
- **On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.**
- **Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.**
- **Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^e tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. **Calculer p_1.**
2. **Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.**
3. **En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.**

---

1. Notons A l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne U_1 ».
   Alors $\overline{A}$ est l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne U_2 ».
   $\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,
   $$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B_1|\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$
   On a donc $\boxed{p_1 = \dfrac{17}{35}.}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,
   $$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}\left(B_{n+1}|\overline{B_n}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_n}\right) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$
   Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}.}$
3. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On cherche une solution particulière constante
   $$c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7} \iff c = \frac{20}{41}.$$
   Les solutions de l'équation homogène associée $u_{n+1} = -\dfrac{6}{35}u_n$ sont les suites géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$.
   On a donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad p_n = \lambda\left(-\dfrac{6}{35}\right)^n + \dfrac{20}{41}.}$
   Remarque : si on ne reconnaît pas une équation linéaire (ou plutôt affine), on peut poser $(u_n)_n = \left(p_n - c\right)_n$ et vérifier que c'est une suite géométrique.
   Or $p_1 = \dfrac{17}{35} = -\dfrac{6\lambda}{35} + \dfrac{20}{41}$ donc $\boxed{\lambda = -\dfrac{35}{6}\left(\dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41}\right) = \dfrac{1}{82}}$

Exercice 108 : Probabilités

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!}$.

1. **Déterminer les lois de X et de Y.**
2. **(a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.**
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. **Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?**
4. **Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$.**

---

1. On a $\boxed{X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}}$ et si $i \in \mathbb{N}$, comme $\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à Y), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

en reconnaissant une série exponentielle. Donc $\boxed{\mathbb{P}(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}.}$

De même, pour $j \in \mathbb{N}$, comme $((X=i))_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à X), par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1}\, j!} = \frac{1}{\mathrm{e}\, j!} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

en reconnaissant une série géométrique. Donc $\mathbb{P}(Y=j) = \mathrm{e}^{-1}\dfrac{1^j}{j!}$: $\boxed{Y \sim \mathscr{P}(1).}$

2. (a) On a bien $(1+X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(1+X=n) = \mathbb{P}(X=n-1) = \dfrac{1}{2^n} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{1+X \sim \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{2}\right).}$

   Alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(1+X) - 1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(1+X) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X) = 2.}$

   (b) D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(Y) = 1.}$

3. Avec les résultats précédents, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ donc $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y.}$

4. $\mathbb{P}(X=Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n, Y=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e} 2^{n+1} n!} = \frac{1}{2\mathrm{e}}\mathrm{e}^{1/2}$ en reconnaissant de nouveau une série exponentielle, donc $\boxed{\mathbb{P}(X=Y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}.}$

Exercice 109 : Probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. **Déterminer la loi de X.**
2. **Déterminer la loi de Y.**

---

1. On a $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$ car il n'y a que deux boules noires. Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des $n+2$ boules.

   Première méthode On peut n'observer que les deux premiers tirages pour conclure. L'univers $\Omega = \mathscr{A}_2(\mathscr{B})$ est l'ensemble des 2-arrangements (couples de 2 éléments distincts) des $n+2$ boules, de cardinal $(n+2)(n+1)$, la tribu est toujours $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme.

   - $\boxed{\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{|(X=1)|}{|\Omega|} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{n}{n+2}}$ car dans un couple de $(X=1)$, il faut placer l'une des n boules blanches, l'une des $n+1$ autres boules ensuite.
   - $\boxed{\mathbb{P}(X=2) = \dfrac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}}$ car dans un couple de $(X=2)$, il faut placer l'une des 2 boules noires, puis l'une des n boules blanches.
   - $\boxed{\mathbb{P}(X=3) = \dfrac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}}$ car dans un couple de $(X=3)$, il faut placer l'une des 2 boules noires d'abord puis la deuxième (pour laquelle il n'y a plus de choix).

   Deuxième méthode On note B_j l'événement « Tirer une boule blanche au j^{e} tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, (on tire respectivement 0, 1 ou 2 noires puis une blanche)

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=1)} = \mathbb{P}(B_1) = \boxed{\frac{n}{n+2}} \qquad \boxed{\mathbb{P}(X=2)} = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2 \,\middle|\, \overline{B_1}\right) = \boxed{\frac{2}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=3)} = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B_2} \,\middle|\, \overline{B_1}\right) = \boxed{\frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}}$$

   Troisième méthode On observe tout le tirage : $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$ de cardinal $(n+2)!$, un tirage est une permutation des $n+2$ boules. La tribu est $\mathscr{P}(\Omega)$ (univers au plus dénombrable) et la probabilité est uniforme vu la description de l'expérience.

   - Une permutation de $(X=1)$ est une permutation commençant par une des n boules blanches, puis permutant les $n+1$ autres ensuite. On trouve $|(X=1)| = n(n+1)!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=1)$.
   - Une permutation de $(X=2)$ est une permutation commençant par une des 2 boules noires, puis une des n boules blanches, puis permutant les n autres ensuite. On trouve $|(X=2)| = 2 \cdot n \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=2)$.
   - Une permutation de $(X=3)$ permute d'abord les 2 boules noires, puis permute les n boules blanches. On trouve $|(X=3)| = 2! \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=3)$.

   Vérification *On calcule* $\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(Y=k) = 1$. *On peut aussi toujours déduire l'une des probabilités des autres.*

2. On a $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ car au mieux on a une boule $n^\circ\, 1$ au premier tirage, au pire, les deux boules $n^\circ\, 1$ sont tirées à la fin.

   Première méthode On peut n'observer que les positions des boules $n^\circ\, 1$, sans ordre. L'univers est l'ensemble $\Omega = \mathscr{P}_2([\![1, n+2]\!])$ des paires d'indices, de cardinal $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, la tribu est toujours $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme. Dans une paire de $(Y=k)$, on a k et un autre entier entre $k+1$ et $n+2$.

   On obtient $\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \dfrac{n+2-(k+1)+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \boxed{\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}.$

   Deuxième méthode On note A_j l'événement « Tirer une boule qui ne porte pas le $n^\circ\, 1$ au j^{e} tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, en regardant l'état de l'urne à chaque tirage,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{j=1}^{k-2} \mathbb{P}\left(A_{j+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{j} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{A_k} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \prod_{j=0}^{k-2} \frac{n-j}{n+2-j} \cdot \frac{2}{n+3-k} = 2 \cdot \frac{n!}{(n+1-k)!} \cdot \frac{(n+2-k)!}{(n+2)!} = \boxed{\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}$$

   Troisième méthode On peut reprendre l'univers $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ d'observation de tous les tirages. Pour décrie une permutation de $(Y=k)$, il faut choisir d'abord $k-1$ des n boules ne portant pas le $n^\circ\, 1$, les permuter, puis une de 2 boules $n^\circ\, 1$ puis permuter les $n+2-k$ boules restantes.

   On obtient $\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \dfrac{\binom{n}{k-1}(k-1)! \cdot 2 \cdot (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n!(n+2-k)!}{(n-k+1)!(n+2)!} = \boxed{\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}.$

Vérification *On calcule* $\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y=k)=1$ *avec le changement d'indice* $j=n+2-k$.

Exercice 110 : Probabilités

Exercice 111 : Probabilités

On admet, dans cet exercice, que : $\forall q\in\mathbb{N},\ \sum_{k\geqslant q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ **converge et** $\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q}=\frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p\in]0,1[$. **Soit** $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ **un espace probabilisé.**
Soit X **et** Y **deux variables aléatoires définies sur** $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ **et à valeurs dans** $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) **est donnée par**

$$\forall (k,n)\in\mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n))=\begin{cases}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \textbf{si } k\leqslant n\\ 0 & \textbf{sinon}\end{cases}$$

1. **Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.**
2. **(a) Déterminer la loi de** Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ **suit une loi géométrique.**
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. **Déterminer la loi de** X.

---

1. On montre qu'on a une distribution de probabilité : pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $k\leqslant n$, $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n\geqslant 0$ et

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=p\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)=p\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n 2^n=p\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n=\frac{p}{1-(1-p)}=1$$

à l'aide de la formule du binôme de Newton puis en reconnaissant une série géométrique.

2. (a) On a $\boxed{Y(\Omega)=\mathbb{N}}$ et si $n\in\mathbb{N}$, comme $((X=k))_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à X), par la formule des probabilités totales,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=n)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=\boxed{p(1-p)^n}$$

comme dans la question précédente.

(b) Alors $(1+Y)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et si $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(1+Y=n)=\mathbb{P}(Y=n-1)=p(1-p)^{n-1}$ donc $\boxed{1+Y\sim\mathscr{G}(p).}$

(c) $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(1+Y)-1=\frac{1}{p}-1}$ d'après le cours.

3. On a $\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}}$ et si $k\in\mathbb{N}$, comme $((Y=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (associé à Y), par la formule des probabilités totales,

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n=\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k}\right)\left(\frac{1-p}{2}\right)^k p=\frac{p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}}=\boxed{\frac{2p(1-p)^k}{(1+p)^{k+1}}}$$

d'après la formule donnée en préambule.

Remarque : on peut continuer $\mathbb{P}(X=k)=\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k\frac{2p}{1+p}=\left(1-\frac{2p}{1+p}\right)^k\frac{2p}{1-p}$*, obtenir que* $1+X\sim\mathscr{G}\left(\frac{2p}{1+p}\right)$ *et en déduire* $\mathbb{E}(X)$ *et* $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 112 : Probabilités