Atelier CPGE – Probabilités et dénombrement

J. Larochette — jeremy.larochette@ac-reunion.fr
https://mpi.lecontedelisle.re

Concours Général 2022 : Un tournoi par équipes

A. Un jeu, deux joueurs

1. (a) L'événement C_2 signifie aussi que Ambre (qu'on notera simplement A) et Benjamin (qu'on notera simplement B) ont eu le même résultat au premier lancer.
Notons D_1 l'événement « Le résultat du premier lancer est Pile pour les deux » et D_2 l'événement « Le résultat du premier lancer est Face pour les deux ».
Alors D_1 et D_2 sont disjoints (on dit aussi *incompatibles* pour des événements) car on ne peut pas obtenir des résultats différents pour un même lancer, et donc
$$\mathbf{P}(C_2)=\mathbf{P}(D_1)+\mathbf{P}(D_2).$$
Notons P_n^A et P_n^B correspondant respectivement au résultat Pile au n^e lancer pour A et pour B.
Alors, par indépendance des lancers,
$$\mathbf{P}(D_1)=\mathbf{P}\left(P_1^A\cap P_1^B\right)=\mathbf{P}\left(P_1^A\right)\mathbf{P}\left(P_1^B\right)=ab.$$
De même,
$$\mathbf{P}(D_1)=\mathbf{P}\left(\overline{P_1^A}\cap\overline{P_1^B}\right)=\mathbf{P}\left(\overline{P_1^A}\right)\mathbf{P}\left(\overline{P_1^B}\right)=(1-a)(1-b).$$
Finalement, $\boxed{\mathbf{P}(C_2)=ab+(1-a)(1-b)=1-a-b+2ab=\lambda.}$
Bien sûr, ce résultat se retrouve en traçant l'arbre des possibles pour le premier lancer dans lequel ont ne garde que les branches correspondant aux résultats (Pile, Pile) et (Face, Face) de probabilité respective ab et $(1-a)(1-b)$ par indépendance.

(b) Soit $n\geqslant 1$. Comme lancer au moins $n+1$ fois implique de lancer au moins n fois,
$$\mathbf{P}(C_{n+1})=\mathbf{P}(C_{n+1}\cap C_n)=\mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbf{P}(C_n).$$
Or la probabilité de C_{n+1} sachant C_n est la probabilité, étant entendu qu'on fait au moins n lancer, qu'on en face un $(n+1)^e$ donc que A et B aient obtenu le même résultat au n^e tirage.
Cette situation est similaire à celle de la question précédente :
$$\mathbf{P}_{C_n}(C_{n+1})=\mathbf{P}(C_2)=\lambda.$$
Ainsi, $\boxed{\forall n\geqslant 1,\quad \mathbf{P}(C_{n+1})=\lambda\mathbf{P}(C_n).}$
La suite $(\mathbf{P}(C_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant géométrique de raison λ, on en déduit que
$$\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(C_n)=\mathbf{P}(C_1)\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}}$$
car $\mathbf{P}(C_1)=1$ (on fait toujours au moins un lancer).

2. (a) Ambre gagne au n^e lancer si le jeu dure au moins n lancers et si, au n^e lancer, Ambre fait Pile et Benjamin fait Face.
Donc $\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}\left(C_n\cap P_n^A\cap\overline{P_n^B}\right)$. Or C_n qui ne concerne que les $n-1$ premiers lancers, P_n^A qui ne concerne que le n^e lancer d'Ambre et $\overline{P_n^B}$ qui ne concerne que le n^e lancer de Benjamin sont indépendants, donc
$$\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}\left(P_n^A\right)\mathbf{P}\left(\overline{P_n^B}\right).$$
Finalement, $\boxed{\mathbf{P}(A_n)=a(1-b)\mathbf{P}(C_n)}$.

(b) Ainsi, d'après la question **1.b**, $\boxed{\mathbf{P}(A_n)=a(1-b)\lambda^{n-1}.}$

(c) Par symétrie des rôles joués par A et B, on obtient de même $\boxed{\mathbf{P}(B_n)=b(1-a)\lambda^{n-1}.}$

3. (a) Comme $\lambda=\mathbf{P}(C_2)$, on a déjà $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.
Montrer que $\lambda\notin\{0,1\}$ est assez délicat.
Se focaliser sur l'expression donnée dans l'énoncé rend l'aboutissement au résultat difficile.
Mieux vaut prendre du recul et remonter le calcul : on a vu en **1.a** que
$$\lambda=\mathbf{P}(C_2)=ab+(1-a)(1-b).$$
Or $a\in]0,1[$ et $b\in]0,1[$ donc $ab>0$ et $(1-a)(1-b)>0$.
Malheureusement, cette expression ne permet pas de conclure facilement que $\lambda<1$.
Cependant, toujours en prenant du recul, on remarque que
$$1-\lambda=\mathbf{P}\left(\overline{C_2}\right)=a(1-b)+(1-a)b$$
car l'événement $\overline{C_2}$, c'est-à-dire « le jeu s'arrête au premier lancer », consiste, au premier lancer, à avoir eu comme résultat (Pile, Face) ou (Face, Pile).
Comme $a,1-a,b,1-b\in]0,1[$, on obtient $1-\lambda>0$.
Finalement, $\boxed{0<\lambda<1.}$

(b) Soit $n\geqslant 1$. On reconnaît dans le même de droite, la somme des termes d'une suite géométrique.
Il est alors naturel, vu la question **2.b**, de noter que $G_A\supset\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup\cdots\cup A_n$ car pour que A gagne, il suffit qu'elle gagne sur l'un des n premiers lancers.
Comme ces événements sont disjoints (on ne peut pas gagner simultanément à des lancers différents),
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(G_A)\geqslant\mathbf{P}(A_1\cup\cdots\cup A_n)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}a(1-b)\lambda^{k-1}\\&=a(1-b)\sum_{\ell=0}^{n-1}\lambda^{\ell}\\&=a(1-b)\times\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\end{aligned}$$

car $\lambda \neq 1$, donc $\boxed{\mathbf{P}(G_A) \geqslant a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}.}$

Par symétrie des rôles de A et B, on a de même $\boxed{\mathbf{P}(G_B) \geqslant b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}.}$

(c) En passant à la limite dans les inégalités précédentes (comme $\lambda \in]0,1[$, $\lambda^n \to 0$), on obtient

$$\mathbf{P}(G_A) \geqslant \frac{a(1-b)}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G_B) \geqslant \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \tag{1}$$

Par ailleurs, $1 = \mathbf{P}(G_A \cup G_B \cup G_\varnothing) = \mathbf{P}(G_A) + \mathbf{P}(G_B) + \mathbf{P}(G_\varnothing)$ car il y a trois issues disjointes possibles à note jeu : A gagne, B gagne, ou personne ne gagne.

Remarquons enfin que

$$\frac{a(1-b)}{1-\lambda} + \frac{b(1-a)}{1-\lambda} = \frac{a-ab+b-ab}{a+b-2ab} = 1.$$

Donc, si, dans (1), l'une des inégalité au moins était stricte, on aurait

$$\mathbf{P}(G_A) + \mathbf{P}(G_B) > \frac{a(1-b)}{1-\lambda} + \frac{b(1-a)}{1-\lambda} = 1$$

ce qui serait contradictoire.

Ce sont donc deux égalité, $\boxed{\mathbf{P}(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda},}$ et donc

$$\mathbf{P}(G_\varnothing) = 1 - (\mathbf{P}(G_A) + \mathbf{P}(G_B)) = 1 - 1$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(G_\varnothing) = 0}$: le jeu s'arrête presque sûrement.

Remarquons que cela ne signifie pas qu'il est impossible que le jeu ne s'arrête pas : on pourrait par exemple tout à fait avoir une situation où les deux joueurs font PILE *à chaque lancer...*

Autre remarque : cela deviendra à peu près évident avec le programme de deuxième année de CPGE qui permettra d'écrire

$$\mathbf{P}(G_A) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(a(1-b)\frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\right) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}...$$

B. Qu'est-ce qu'un jeu régulier ?

4. Les deux premiers points sont bien vérifiés, et, en reprenant les résultats de la partie précédente, si $i \neq j$, $\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } A_j) = \frac{p_i(1-p_j)}{1-\lambda_{i,j}}$ où $\lambda_{i,j} = 1 - p_i - p_j + 2p_ip_j = \lambda_{j,i}$.

Donc $\frac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{\mathbf{P}(A_j \text{ gagne contre } A_i)} = \frac{p_i(1-p_j)}{p_j(1-p_i)}$ et il suffit de poser $\boxed{a_i = \frac{p_i}{1-p_i}}$ pour obtenir un jeu régulier.

C. Un tournoi régulier par équipes

5. (a) Vu les conditions du jeu, il est certain que l'équipe A ou (exclusif) l'équipe B gagne le tournoi.

Ainsi, $\boxed{u_{m,n} + u_{n,m} = 1.}$

(b) En prenant $m = n$, on obtient alors $\boxed{u_{n,n} = \frac{1}{2}.}$

(c) Si $m = 1$, pour que le seul joueur de l'équipe A gagne, il faut et il suffit qu'il gagne contre tous les n joueurs de l'équipe B successivement (et de manière indépendante). Or, comme pour tous i et j, $a_i = b_j = 1$, la probabilité que A gagne contre n'importe quel joueur B_j vaut $\frac{1}{2}$.

Finalement, $\boxed{u_{1,n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.}$

(d) Si $m = 2$, pour que l'équipe A gagne, il y a des situations disjointes :

- Soit A_1 ne perd jamais (donc gagne conte $B_1, \dots, B_n$) : événement E ;
- Soit, pour $k \in [\![1,n]\!]$, A_1 gagne contre $B_1, \dots, B_{k-1}$, puis perd contre B_k, puis A_2 gagne contre $B_k, \dots, B_n$: événement E_k.

Comme chaque joueur a une chance sur 2 de gagner contre chaque autre joueur et comme les parties sont indépendantes, on en déduit que

$$u_{2,n} = \mathbf{P}(E) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(E_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}\right] = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}$$

donc $\boxed{u_{2,n} = \frac{n+2}{2^{n+1}}.}$

6. (a) On a

$$\frac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j)}{\mathbf{P}(B_j \text{ gagne contre } A_j)} = \frac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j)}{1 - \mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j)} = \frac{a_i}{b_j}$$

donc

$$\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j) = \frac{a_i}{b_j}\left(1 - \mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j)\right)$$

donc

$$\left(1 + \frac{a_i}{b_j}\right)\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j) = \frac{a_i}{b_j}$$

et enfin $\boxed{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j) = \frac{a_i}{a_i + b_j}.}$