Atelier CPGE – Probabilités et dénombrement

J. Larochette – jeremy.larochette@ac-reunion.fr
https://mpi.lecontedelisle.re

Concours Général 2022 : Un tournoi par équipes

Si E est un événement, on désigne par $\mathbf{P}(E)$ la probabilité de E. On pourra librement utiliser le résultat suivant : si $D_1, \dots, D_k$ sont des événements deux à deux disjoints, alors :

$$\mathbf{P}(D_1 \cup \dots \cup D_k) = \mathbf{P}(D_1) + \dots + \mathbf{P}(D_k)$$

A. Un jeu, deux joueurs

Ambre dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne Pile avec une probabilité $a \in]0;1[$ et donne Face avec une probabilité $1-a$. Quant à lui, Benjamin dispose d'une pièce qui, à chaque lancer, donne Pile avec une probabilité $b \in]0;1[$ et donne Face avec une probabilité $1-b$.

Ils décident de jouer au jeu suivant : chacun lance sa pièce. S'ils obtiennent tous les deux Pile ou tous les deux Face, ils relancent chacun leur pièce et continuent ainsi tant qu'ils obtiennent simultanément Pile ou simultanément Face. *A contrario*, ils s'arrêtent dès que l'un obtient Pile et l'autre Face. Celui qui obtient Pile est alors déclaré gagnant. Tous les lancers sont indépendants.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n l'événement « Ambre gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer », B_n l'événement « Benjamin gagne lors du $n^{\text{ème}}$ lancer » et C_n l'événement « chacun des deux joueurs lance au moins n fois sa pièce lors de ce jeu ».

1. (a) On pose $\lambda = 1 - a - b + 2ab$. Démontrer que $\mathbf{P}(C_2) = \lambda$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer $\mathbf{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbf{P}(C_n)$. En déduire une expression de $\mathbf{P}(C_n)$ en fonction de n.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
   (a) Exprimer $\mathbf{P}(A_n)$ en fonction de a, b et $\mathbf{P}(C_n)$.
   (b) En déduire une expression de $\mathbf{P}(A_n)$ en fonction de a, b et n.
   (c) Donner une expression de $\mathbf{P}(B_n)$ en fonction de a, b et n.
3. On note G_A l'événement « Ambre est gagnante » et G_B l'événement « Benjamin est gagnant ».
   (a) Démontrer que $0 < \lambda < 1$.
   (b) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que

$$\mathbf{P}(G_A) \geqslant a(1-b) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G_B) \geqslant b(1-a) \times \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}.$$

   (c) On note $G_\varnothing$ l'événement « Ce jeu n'a aucun gagnant ». Déduire de ce qui précède que :

$$\mathbf{P}(G_A) = \frac{a(1-b)}{1-\lambda}, \quad \mathbf{P}(G_B) = \frac{b(1-a)}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G_\varnothing) = 0$$

B. Qu'est-ce qu'un jeu régulier ?

Un jeu à N personnes $A_1, A_2, \dots, A_N$ est dit *régulier* lorsqu'il possède les caractéristiques suivantes :

- Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs. Chaque tour ne concerne que deux joueurs. Chaque personne peut jouer plusieurs tours, mais n'est pas obligée de jouer contre chacune des autres personnes.
- À chaque tour, il ne peut y avoir qu'un seul gagnant.
- Il existe des réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_N$ tels que, pour toutes personnes A_i et A_j, le quotient des probabilités $\dfrac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } A_j)}{\mathbf{P}(A_j \text{ gagne contre } A_i)}$ soit égal à $\dfrac{a_i}{a_j}$.

4. Démontrer que le jeu suivant est régulier :
   Les personnes $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ disposent chacune d'une pièce. Pour tout i, à chaque lancer, la pièce de la personne A_i donne Pile avec une probabilité $p_i \in]0;1[$ et donne Face avec une probabilité $1-p_i$. Le jeu se déroule en un ou plusieurs tours successifs, et à chaque tour deux personnes se rencontrent et jouent selon les modalités du jeu décrit dans la partie A.

C. Un tournoi régulier par équipes

Soient A et B deux équipes. On note $m \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de A et $n \in \mathbb{N}^*$ l'effectif de B. On numérote alors les membres des équipes par ordre de passage : $A_1, A_2, \dots, A_m$ pour A et $B_1, B_2, \dots, B_n$ pour B. Les deux équipes A et B s'affrontent lors d'un tournoi constitué de plusieurs parties successives dont les issues sont indépendantes. Lors de chaque partie, la première personne de l'équipe A joue contre la première personne de l'équipe B et, à l'issue de cette partie, une seule de ces deux personnes est déclarée gagnante et le perdant est éliminé. Le gagnant joue alors contre une nouvelle personne de l'équipe adverse et on continue ainsi jusqu'à ce qu'une équipe n'ait plus d'adversaire, gagnant ainsi le tournoi.

Par exemple, pour $m = n = 3$, la personne A_1 joue contre la personne B_1. Si A_1 gagne, alors B_1 est éliminée, et A_1 joue contre B_2 lors de la seconde partie. Si, cette fois, c'est B_2 qui gagne, alors A_1 est éliminée et B_2 rencontre A_2 pour la partie suivante. Si B_2 gagne cette nouvelle partie, alors A_2 est éliminée et B_2 rencontre maintenant A_3. Si B_2 gagne à nouveau, alors A_3 est éliminée et l'équipe B a remporté le tournoi. On suppose de plus que l'ensemble du tournoi constitue un jeu régulier. Il existe donc des réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_m$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ tels que, pour chaque partie qui voit s'affronter les personnes A_i et B_j, on ait :

$$\frac{\mathbf{P}(A_i \text{ gagne contre } B_j)}{\mathbf{P}(B_j \text{ gagne contre } A_i)} = \frac{a_i}{b_j} \tag{$\star$}$$

5. Dans cette question uniquement, on suppose que $a_i = b_j = 1$ pour tous i et j.
   On note $u_{m,n}$ la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi.
   (a) Démontrer que $u_{m,n} + u_{n,m} = 1$.
   (b) Que vaut $u_{n,n}$?
   (c) Déterminer la valeur de $u_{1,n}$ en fonction de n.
   (d) Déterminer la valeur de $u_{2,n}$ en fonction de n.

6. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas $m = n = 2$. Les nombres a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont plus supposés être égaux à 1.
   (a) Exprimer la probabilité que A_i gagne contre B_j en fonction de a_i et b_j.
   (b) Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi est égale à :

$$\frac{a_1^2a_2^2 + a_1a_2(a_1+a_2)(b_1+b_2) + \left(a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2\right)b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)}$$

   Cette probabilité dépend-elle de l'ordre choisi des joueurs pour leur entrée dans le tournoi ?

D. Une généralisation

On conserve le tournoi régulier décrit dans la partie C.

Cependant, en plus des parties du tournoi, on décide de faire jouer chaque membre de l'équipe A contre chacun des membres de l'équipe B qu'il n'a pas rencontrés durant le tournoi, les parties supplémentaires satisfaisant toujours la propriété $(\star)$. Cela donne un total de mn parties. On code les résultats de ces parties grâce à un tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes. Dans la case située sur la ligne i et la colonne j, on place un symbole A si A_i a gagné contre B_j, et un symbole B sinon.

Dans l'exemple de tournoi présenté en début de partie C avec $m = n = 3$, on obtiendra un tableau de la forme :

A	B	?
?	B	?
?	B	?

où chacun des symboles ? cache un A ou un B selon le résultat de la partie ajoutée au tournoi.

De façon générale, on dira que le tableau est *gagnant* s'il correspond à un tournoi gagné par l'équipe A.

7. Dans cette question, on suppose que $m = 2$. Indiquer les formes possibles de tous les tableaux gagnants et montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a exactement $2^n + n2^{n-1}$ tableaux gagnants.
8. Dans cette question, on suppose toujours que $m = 2$.
   (a) On note D le produit de tous les nombres $\left(a_1+b_j\right)\left(a_2+b_j\right)$ lorsque j décrit $\{1;2;\ldots;n\}$. Ainsi, on a $D = (a_1+b_1)\cdots(a_1+b_n)\times(a_2+b_1)\cdots(a_2+b_n)$.

   On pourra noter $D = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(a_1+b_j\right)\left(a_2+b_j\right)$.

   On considère un tableau T, gagnant ou non. Pour ce tableau, on note respectivement x_1 et x_2 le nombre de parties gagnées par A_1 et par A_2. Pour tout j, on note y_j le nombre de parties gagnées par B_j.

   Enfin, on organise un tournoi entre les équipes A et B, et on note $\mathbf{P}_T$ la probabilité que les résultats des mn parties effectuées donnent le tableau T.

   Exprimer $\mathbf{P}_T$ en fonction des nombres $D, a_1, a_2, x_1, x_2, b_1, b_2, \ldots, b_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

   (b) On suppose maintenant que T est un tableau gagnant. On note k le nombre de colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ de T et ℓ son nombre de colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

   i) Justifier que T ne contient aucune colonne $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline B\\\hline\end{array}$ et qu'aucune colonne $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ n'est à droite d'une colonne $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

   ii) On note T' le tableau obtenu à partir de T de la façon suivante :

   - On conserve les colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline A\\\hline\end{array}$ et on les laisse à leur place.
   - On remplace les k colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ et ℓ colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$ de T par ℓ colonnes $\begin{array}{|c|}\hline A\\\hline B\\\hline\end{array}$ suivies de k colonnes $\begin{array}{|c|}\hline B\\\hline A\\\hline\end{array}$.

   Démontrer que T' est un tableau gagnant.

   Qu'obtient-on si l'on effectue la même transformation à partir de T' ?

   (c) Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre choisi des joueurs de l'équipe A pour leur entrée dans le tournoi.

9. On revient au cas général (m quelconque). Démontrer que la probabilité que l'équipe A gagne le tournoi ne dépend pas de l'ordre choisi des joueurs pour leur entrée dans le tournoi.