20

Polynômes d'endomorphismes et de matrices, application à la réduction

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Polynômes d'endomorphisme et de matrices

1 Rappels

$(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$ $\quad$ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times,\cdot)$

On a vu que si $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit

- $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$
- $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$
- $\Phi_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
- $\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

- $\Phi_u(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$
- $\Phi_u(1_{\mathbb{K}[X]}) = 1_{\mathbb{K}[X]}(u) = id_E$
- $\Phi_u(PQ) = (P\times Q)(u) = P(u) \circ Q(u) = \Phi_u(P) \circ \Phi_u(Q)$

Remarque

- **R 1 –** Ne pas confondre le polynôme P, l'endomorphisme $P(u)$ et la matrice $P(A)$.
- **R 2 –** $(P(u))(x)$ existe mais pas $P(u(x))$.
- **R 3 –** Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
- **R 4 –** Deux polynômes en u (respectivement A) commutent.

$P(u) \circ Q(u) = (P\times Q)(u) \underset{\mathbb{K}[X] \text{ commutatif}}{=} (Q\times P)(u) = Q(u) \circ P(u)$

Notation 1 : Ensemble des polynômes en u / A

On note $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Im}\,\Phi_u = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Im}\,\Phi_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Remarque

- **R 5 –** Ne pas dire « Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ » : il n'y a pas unicité en général (Φ_u n'est pas injective). Préférer « Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$... ».

Propriété 1 : Structure de sous-algèbre

$\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}\left(u^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}\left(A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-algèbres commutatives de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

2 Propriétés

Propriété 2 : Polynômes et similitude

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P\left(Q^{-1}AQ\right) = Q^{-1}P(A)Q$.

Propriété 3 : Cas des matrices diagonales et triangulaires

Si $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

(i) $P(D) = \mathrm{diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n))$

(ii) $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

3 Polynômes annulateur

a Définition

Définition 1 : polynôme annulateur

P est un **polynôme annulateur** de u (respectivement A) lors $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exemple

E 1 – Le polynôme nul.

E 2 – Si p est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.

E 3 – Si s est une symétrie, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de s.

Propriété 4 : Existence d'un polynôme annulateur

(i) Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u.

(ii) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de A.

Méthode 1 : Calcul de puissances à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A.
2. Pour un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$, on calcule le reste de la division euclidienne de S pour P : $S = PQ + R$ où $\deg R < \deg P$. C'est plutôt facile lorsque P est scindé simple (Interpolation de Lagrange).
3. On en déduit, entre autres, pour $k \in \mathbb{N}$, avec $S = X^k$, $A^k = R(A)$.

Méthode 2 : Montrer l'inversibilité et déterminer l'inverse à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A avec un terme constant non nul.
2. On en déduit une matrice B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$, l'un des deux suffisant) en isolant I_n.
3. Alors A est inversible, d'inverse B qui s'exprime comme un polynôme en A.

Exercice 1

Si $A^2 - 3A + 2I_n = 0$, calculer les puissances de A, vérifier que A est inversible et que exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

b Polynômes annulateurs et valeurs propres

Propriété 5 : Image par un polynôme d'endomorphisme

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$

Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $[P(u)](x) = P(\lambda)x$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kX = \lambda^k X$

Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

Corollaire 1 : Certaines valeurs propres de $P(u)$ et $P(A)$

Si λ est valeur propre de u (respectivement A), alors

$P(\lambda)$ valeur propre de $P(u)$ (resp. $P(A)$).

Propriété 6 : Les valeurs propres sont parmi les racines d'un polynôme annulateur

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$), $\mathscr{Z}(P)$ l'ensemble des racines de P, alors

$\mathrm{Sp}(u) \subset \mathscr{Z}(P)$ (resp. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathscr{Z}(P)$)

L'inclusion est stricte en général.

Remarque

R 6 – Les valeurs propres sont **parmi** les racines de P

Exemple (p projection)

E 4 – Si $p^2 = p$ alors $\mathrm{Sp}\, p \subset \{0, 1\}$.

$P = X^2 - X = X(X-1)$

Exercice 2 : CCINP 65

II Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 1 : Lemme de décomposition des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$

Plus généralement, si $P_1, \ldots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors

$$\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$

Exercice 3 : Résoudre $y^{(4)} = y$, $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, u opérateur de dérivation.

Exercice 4 : CCINP 93

Corollaire 2 : Décomposition dans une base adaptée

(i) *Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par u.*

(ii) *Si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$ est un polynôme annulateur de u, alors*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

la matrice dans une base adaptée est diagonale par blocs.

Propriété 7 : Caractérisation 7 de diagonalisabilité

Si E est de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme simplement scindé.

(s'adapte aux matrices)

⚠ Pour u diag^able, χ_u n'est pas tjs simplement scindé.

III Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Propriété 8 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Si u est diagonalisable, F stable par u et u_F l'endomorphisme induit, alors u_F est diagonalisable.

On a déjà vu que les droites stables par u étaient exactement les droites engendrées par un vecteur propre.

Méthode 3 : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Le théorème suivant est hors-programme : il faut le redémontrer lorsqu'on en a besoin.

Théorème 2 : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.
Un sous-espace non nul F de E est stable par u si et seulement s'il existe une base de F formée de vecteurs propres de u.

En effet, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F formée de vecteurs propres, les images de chacun des vecteurs sont encore dans F et F est bien stable par u.

Si, réciproquement, F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est diagonalisable, u_F l'est aussi et on a une base de F formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

On peut donc déterminer des sous-espaces stables soit nuls, soit ayant une base construite à partir de vecteurs propres.

Exercice 5 : Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 4 : Résolution d'une équation matricielle

On trouve à l'oral des exercices du type : résoudre $P(X) = M$, où M est une matrice donnée, P un polynôme, X une matrice inconnue. Par exemple : Résoudre $X^2 + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Il n'y a pas **une** méthode pour aborder ce problème, mais quand même... il est important de remarquer que si $P(X) = M$, alors X et M commutent. Et donc X laisse stables l'image, le noyau, les sous-espaces propres de M. Ce qui délimite pas mal les choses.

Comme toujours, il peut y avoir d'autres méthodes : les connaissances au programme sur les matrices nilpotentes permettent parfois de conclure très vite (exemple classique : résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Signalons enfin (voir plus tard) qu'une solution de l'équation $\exp(X) = M$ commute nécessairement avec M.

IV Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 3 : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Exemple

E 5 – Si $n = 2$, $A^2 = (\mathrm{tr}\, A) A - (\det A) I_n$.

V Polynôme minimal

On suppose E de dimension finie n.

Propriété 9 : Idéal annulateur

*L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$ appelé **idéal annulateur** de u (respectivement A).*

Définition 2 : Polynôme minimal

On appelle **polynôme minimal** de u (respectivement de A)

On le notera π_u ou parfois μ_u (respectivement π_A ou parfois μ_A).

Remarque

- **R 7** – La définition est licite car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.
- **R 8** – $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} = (\pi_u) = \pi_u \mathbb{K}[X]$: π_u est donc le polynôme annulateur unitaire non nul de degré minimal.
- **R 9** – $P(u) = 0$ si et seulement si π_u divise P.
- **R 10** – Si $P(u) = 0$ et $\deg P < \deg \pi_u$, alors $P = 0$.

Propriété 10 : Invariant de similitude

Si A est une matrice représentant l'endomorphisme u, alors

Propriété 11 : Base de $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$

Si $d = \deg \pi_u$ (respectivement $d = \deg \pi_A$), alors

Propriété 12 : Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.
En particulier, il est de degré au plus n.

Propriété 13 : Racines du polynôme minimal

*Les racines du polynôme minimal sont **exactement** les valeurs propres.*

Remarque

- **R 11** – Donc $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)$ divise π_u qui divise χ_u.
- **R 12** – χ_u et π_u ont les mêmes racines mais pas nécessairement les mêmes multiplicités. Exemple : avec I_n
- **R 13** – Si χ_u est simplement scindé, alors
  La réciproque est fausse : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 14 : Caractérisation 8 de la diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement si

(Idem avec les matrices)

Propriété 15 : Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Si F est stable par u, u_F l'endomorphisme induit, alors

Propriété 16 : Caractérisations 2 et 3 de la trigonalisabilité

u est trigonalisable si et seulement si

Méthode 5 : Déterminer le polynôme minimal

- Par définition, le polynôme minimal est le polynôme annulateur unitaire de degré minimal.
- Si on connaît un polynôme annulateur, le polynôme minimal est l'un de ses diviseur.
- Avec le polynôme caractéristique, c'est encore plus précis : celui-ci est un polynôme annulateur par le théorème de Cayley-Hamilton, mais on sait aussi que les racines du polynôme caractéristique sont exactement les mêmes que celles du polynôme minimal : les valeurs propres.
- Il suffit donc de déterminer l'ensemble des polynômes **divisant le polynôme caractéristique** et **ayant les mêmes racines** (mais des multiplicités inférieures ou égales) et de déterminer **celui de degré minimal** qui est un **polynôme annulateur**.

Exercice 6 : CCINP 91

Exercice 7 : CCINP 88

VI Sous-espaces caractéristiques

Définition 3 : Sous-espaces caractéristiques

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u et les m_k (leurs multiplicités) sont dans $\mathbb{N}^*$.

On appelle **sous-espaces caractéristiques** de u les sous-espaces

pour $k \in [\![1, p]\!]$.

Remarque

R 14 – À ne pas confondre avec les sous-espaces propres $E_k(u) = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \mathrm{id}_E\right)$!

Propriété 17 : des sous-espaces caractéristiques

Avec les mêmes hypothèses et notations,

(i) *Chaque $F_k(u)$ est stable par u.*

(ii) $E =$

(iii) $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad E_k(u)$

(iv) $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \dim F_k(u) =$

Théorème 4 : Réduction par blocs

Si χ_u est scindé, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux .

Si χ_A est scindé, A est semblable à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à cœfficients diagonaux égaux.

Corollaire 3 : Décomposition de Dunford (HP)

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que

Remarque

R 15 – On peut même montrer que d et n sont uniques et sont des polynômes en u.
On parle de **décomposition de Dunford** (voir TD).

R 16 – C'est très intéressant pour calculer les puissances de u.