6

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

1 Définition

Définition 1 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda\cdot x \end{array} \right.$$

On appelle **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0_E ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,x\in E,\quad (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\,x,y\in E,\quad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall\,\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \forall\,x\in E,\quad (\lambda\times\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall\,x\in E,\quad 1_{\mathbb{K}}\cdot x = x.$

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $x_1,\dots,x_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Si $\left(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E\times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $(x,y),(x',y')\in E\times F$,

$$(x,y)+(x',y') = \left(x\underset{E}{+}x',\, y\underset{F}{+}y'\right)$$

$$\lambda\cdot(x,y) = \left(\lambda\underset{E}{\cdot}x,\, \lambda\underset{F}{\cdot}y\right)$$

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions.

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ *pour tout ensemble* D,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et, plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$, alors $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.

On dit que $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $(F,+_{|F^2},\cdot_{|\mathbb{K}\times F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation de sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\iff \begin{cases} F\subset E \\ F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\, x,y\in F,\quad x+y\in F \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\, x\in F,\quad \lambda x\in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} F\subset E \\ F\neq\varnothing\ (0_E\in F) \\ \forall\,\lambda\in\mathbb{K},\quad \forall\, x,y\in F,\quad x+\lambda y\in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$.

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.

Si $F=\operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A\subset E$. $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\operatorname{Vect} A = \{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n\ ;\ n\in\mathbb{N}^*, x_1,\dots,x_n\in A, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}.$$

Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.

Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'une système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.

Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\operatorname{Vect} A=\operatorname{Vect} B$, on montre que

$$A\subset \operatorname{Vect} B$$

puis que

$$B\subset \operatorname{Vect} A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{F}=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\setminus\{(0,\dots,0)\},\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i\in[\![1,n]\!],\quad \lambda_i = 0.$$

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall\, x\in E,\ \ \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \ x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$$

c'est-à-dire $E=\operatorname{Vect}\mathscr{F}$.

- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- Une famille de polynômes **non nuls** à degrés étagés est libre.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall\, x\in E,\ \ \exists!\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\ \ x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$. Le triplet $(x_1,\dots,x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathscr{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles

- $\big((0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ k^e}}{1},0,\dots,0)\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$,
- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$,
- $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant p}$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Propriété 9 : Complétion d'une famille libre

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1,\dots,x_n,y\in E$.

- $(x_1,\dots,x_n,y)$ *libre* $\Longleftrightarrow \begin{cases}(x_1,\dots,x_n)\ \text{libre}\\ y\notin\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)\end{cases}$
- $(x_1,\dots,x_n)$ *liée si et seulement s'il existe* $i_0\in[\![1,n]\!]$ *tel que* $x_{i_0}\in\operatorname{Vect}\big((x_i)_{i\neq i_0}\big)$.
Lorsque c'est le cas, on a alors

$$\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)=\operatorname{Vect}(x_i)_{i\neq i_0}.$$

6 Sommes de sous-espaces vectoriels [MPI]

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F_1+\ldots+F_n=\sum_{i=1}^{n}F_i=\{x_1+\cdots+x_n \mid \forall\, i,\quad x_i\in F_i\}.$$

Ainsi,

$$x\in\sum_{i=1}^{n}F_i \iff \exists\,(x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n,\quad x=x_1+\cdots+x_n.$$

Propriété 10

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si $A_1,\dots,A_n$ sont des parties de E, alors*

$$\mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Vect}\,A_k.$$

7 Somme directe [MPI]

Définition 7 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont en **somme directe** lorsque pour tout $x\in F_1+\cdots+F_n$, l'écriture $x=x_1+\cdots+x_n$ où $\forall\, i,\quad x_i\in F_i$ est unique.

On note alors

$$F_1+\cdots+F_n=F_1\oplus\cdots\oplus F_n=\bigoplus_{i=1}^{n}F_i.$$

Propriété 11 : Caractérisation

$F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall\,(x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n$,

$$x_1+\cdots+x_n=0_E\implies x_1=\cdots=x_n=0_E.$$

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{0_E\}$.

⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

8 Sous-espaces supplémentaires [MPI]

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E=F\oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall\,x\in E,\quad \exists!\,(x_F,x_G)\in F\times G,\quad x=x_F+x_G.$$

Propriété 13

(i) *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F+G=E$ et $F\cap G=\{0_E\}$.*

(ii) *Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.*

Méthode 6 : Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x=a+b$, alors... $a=$ ... et $b=$ ... (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F\cap G=\{0_E\}$ (en général plus facile) et $F+G=E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F+\dim G=\dim E$ et, au choix, soit $F\cap G=\{0_E\}$, soit $F+G=E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F\oplus F^{\perp}=E$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1,\dots,F_n$ **sont supplémentaires dans** E lorsque $F_1\oplus\cdots\oplus F_n=E$ c'est-à-dire

$$\forall\,x\in E,\quad \exists!\,(x_1,\dots,x_n)\in F_1\times\cdots\times F_n,\quad x=x_1+\cdots+x_n.$$

II DIMENSION FINIE

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$.

- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Définition 11 : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim E = 0$.

Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.

*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Corollaire 2

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.

Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et

$$\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n.$$

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Définition 12 : Droites, plans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) *Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F}' \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.*

6 Somme directe et supplémentaire [MPI]

Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).

On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1+\dots+F_n$, et, de plus,

les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.

On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Corollaire 3 : dimension d'une somme

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de E.

$F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E = F_1 + \dots + F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

De plus, si $p = \dim F$ et $n = \dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n-p$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

III Applications linéaires

1 Généralités

a Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall x, y \in E, \quad u(x+y) = u(x) + u(y) \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda x) = \lambda u(x) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) $u(0_E) = 0_F$

(ii) $\forall\, x_1, \dots, x_n \in E,\ \ \forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(x_i).$$

(iii) *Si A est une partie de E, $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.*

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

c Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} \in \mathscr{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x)\ ;\ x \in E\} \in \mathscr{P}(F).$$

Propriété 22

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) *$\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.*

(ii) *u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.*

(iii) *u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker}\left(u_{|E'}\right) = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}\left(u_{|E'}\right) = u(E')$.*

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.

Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Propriété 24 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0\, \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.

Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété 26

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\begin{array}{rcl} (\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E),+,\circ,\cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ *est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

⚠ *En particulier,* $(P\times Q)(u) = P(u)\circ Q(u)$.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u\circ v = v\circ u$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k}.$$

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété 28 : Structure

$(\mathscr{GL}(E),\circ)$ *est un groupe.*

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un cœfficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u\circ v = v\circ u = \mathrm{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u.

c Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F\oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F\in F$ et $x_G\in G$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.

On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathscr{L}(E)$
- $p + q = \mathrm{id}_E$
- $p\circ q = q\circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p\in(E)$ et $p^2 = p\circ p = p$.

Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$

(ii) *p est la projection sur*

$$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$

parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\, p$

Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p\in\mathscr{L}(E)$ et $p\circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$.

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F\oplus G = E$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F\in F$ et $x_G\in G$.

On appelle **symétrie sur** F **parallèlement à** G l'application $s : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 31

(i) $s\in\mathscr{L}(E)$

(ii) *Si p projection sur F parallèlement à G,* $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.
Le cas échéant,

(i) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la symétrie par rapport à $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^e coordonnée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.
Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété 34 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ \ u(e_i) = f_i$.

Corollaire 6 : Applications linéaires coïncidant sur une base

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété 35

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36 : CNS pour que $\dim E = \dim F$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Propriété 37

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Propriété 38

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) *u isomorphisme*

(ii) *u est inversible à gauche*

(iii) *u est inversible à droite*

(iv) $\mathrm{rg}\, u = n$

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété 39

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

d Décomposition d'applications linéaires [MPI]

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i} = u_i$.

4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.

Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E.

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, \quad H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$, donc de codimension 1.

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n-p$ hyperplans distincts.

6 Solutions des problèmes linéaires

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété 42 : Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

IV Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Sauf mention contraire, n, p, q, r, s désignent des entiers naturels non nuls.

1 Espaces de matrices

Propriété 43 : Espace vectoriel de matrices

(i) *$(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément nul $0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.*

(ii) *$\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.*

Définition 24 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array}$$

Propriété 44 : Cœfficients des matrices élémentaires

$$\forall\, i,k \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j,\ell \in [\![1,p]\!],\quad (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

Définition 25 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array} \right.$$

avec $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j \in [\![1,q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Propriété 45 : Bilinéarité, associativité, neutre

(*i*) ***Associativité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

(*ii*) ***Bilinéarité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ *et* $B \mapsto A \times B$ *sont linéaires.*

(*iii*) ***Neutre*** : *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété 46 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Théorème 7 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{c} \overset{p}{\leftrightarrow}\ \overset{q}{\leftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array}$ *et* $N = \begin{array}{c} \overset{r}{\leftrightarrow}\ \overset{s}{\leftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ *où* A, B, C, D, E, F, G, H *sont des matrices de format correspondant. Alors*

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition

Définition 26 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $A^\intercal \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\quad \left(A^\intercal\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Propriété 47 : de la transposition

Soit $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\intercal \end{array} \right.$

(*i*) ***Linéarité*** : *Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$$

(*ii*) T *est* ***involutif*** : *si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\intercal)^\intercal = A$.

(*iii*) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal$.

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 48 : Algèbre des matrices carrées

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que* $n \geqslant 2$, *d'élément unité* I_n. *Ainsi,* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* K*-algèbre de dimension* n^2.

Propriété 49 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition 27 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Propriété 50

(*i*) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(*ii*) *Si* $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) *Si* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) *Sont équivalentes :*

- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) *Si* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ *et* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

(vi) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *si et seulement si* $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et dans ce cas* $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$

Méthode 10 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - soit exclusivement sur les lignes,
  - soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).

b Matrices carrées particulières

Définition 28 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\ \ m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\ \ m_{i,j} = 0$.)

  On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**
- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\ \ m_{i,j} = 0$.

  On note $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.

  On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!],\ \ s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!],\ \ a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Propriété 51 : Sous-algèbres

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Propriété 52 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

c Trace d'une matrice carrée

Définition 29 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété 53 : de la trace

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *et* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

V Matrices et applications linéaires

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 30 : Matrice d'une application linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
  - Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathscr{B}$** la matrice colonne
  $$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
  - Si $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
  Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$ (ie $x_j \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
  On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** la matrice rectangulaire
  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \dots & X_p \end{array} \right)$$
  $$= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{F}$.
- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathscr{B}$.
  Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note
  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 54 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Propriété 55 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Pour tout $x \in E$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 56 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $\mathscr{D}$ une base de G, $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$.
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

Propriété 57 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 31 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Définition 32 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\operatorname{Ker} A = \left\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$ correspondant à $\operatorname{Ker} u = \{x \in \mathbb{K}^p \mid u(x) = 0_{\mathbb{K}^p}\}$

$\operatorname{Im} A = \{AX \ ; \ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\operatorname{Im} u = \{u(x) \ ; \ x \in \mathbb{K}^p\}$.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} A)$$

Propriété 58 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(*i*) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A.*

(*ii*) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(*iii*) ***Formule du rang*** : $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété 59 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

(*i*) *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible*

(*ii*) *Son application linéaire canoniquement associée u est un automorphisme*

(*iii*) $\operatorname{Ker} A = \left\{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

(*iv*) $\operatorname{rg} A = n$

3 Changement de base

Définition 33 : Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{B}'$.

Autrement dit $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{id}_E)$.

Propriété 60 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Propriété 61 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $x \in E$.

Si $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$, alors

$$\underset{\mathcal{B}}{X} = \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \times \underset{\mathcal{B}'}{X'}$$

Propriété 62 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{C}'\to\mathcal{C}}{P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}} \times \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad ie \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire 9 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}} \times \underset{\mathcal{B}}{A} \times \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad ie \quad A = PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition 34 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UBV$.

Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Propriété 63 : Transposées de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\intercal$ et $B^\intercal$ le sont.

Théorème 8 : Rang et équivalence avec J_r

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Corollaire 10

(i) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(ii) *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\intercal)$.*

(iii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

5 Matrices semblables

Définition 35 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Propriété 64 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.

Méthode 11

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 65 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall k \in \mathbb{N},\quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) *A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans $\mathbb{Z}$.*

Propriété 66 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. La réciproque est fausse.

Définition 36 : trace d'un endomorphisme

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 67 : de la trace

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété 68 : à retenir ! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

6 Rang et matrices extraites

Définition 37 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I\times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété 69 : Caractérisation du rang

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

VI Opérations élémentaires

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

1 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

Permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ (respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (respectivement à droite) par la **matrice de permutation** (et plus précisément transposition) :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & (0) & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad \uparrow & \qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad i^{e} & \qquad\qquad j^{e} \end{matrix} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

Transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (respectivement $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (respectivement $T_{k,j}(\lambda)$ à droite : **bien remarquer la logique des indices !**) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda \cdots & 1 & \\ & (0) & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ i^{e} \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \uparrow \\ j^{e} \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda) T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (respectivement $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (respectivement à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \ i^{e} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$D_i(\lambda) D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $\left(D_i(\lambda)\right)^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

2 Propriétés des opérations élémentaires

Propriété 70 : des opérations élémentaires

(i) *Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.*

(ii) *Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.*

(iii) *Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.*

3 Matrices échelonnées

Définition 38 : Matrice échelonnée

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **échelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Propriété 71 : Toute matrice peut être échelonnée

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (respectivement colonnes) de la matrice.

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété 72 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) est le nombre de lignes (respectivement colonnes) non nulles.

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 73 : transformation en I_n

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

Corollaire 11 : Famille génératrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Les matrice d'opérations élémentaires engendrent $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots\cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots\cdots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots\cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\boxed{(S) \iff Ax = b}$
- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \iff u(x) = b \iff x \in u^{-1}(\{b\})}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^e (canoniquement associée à la i^e ligne de A) :

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array} \right.$$

alors $\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi_i(x) = b_i \iff x \in \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$

b Espace des solutions

Définition 39 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u \leqslant \min(n,p)$.

Propriété 74 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Propriété 75 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solution $\mathcal{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathcal{S}_S = x_0 + \mathcal{S}_H$ où $x_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathcal{S}_H$.

*Lorsque $\mathcal{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

Propriété 76 : Rang et nombre de solutions

*(i) Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \operatorname{rg}(S)$ ie A inversible.*

Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) Si $\operatorname{rg} S = n$, le système a au moins une solution.

(iii) Si $\operatorname{rg} S = p$, le système a au plus une solution.

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \quad \cdots & = b'_1 \\ \qquad p_2 x_{i_2} + \quad \cdots & = b'_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad p_r x_{i_r} + \cdots & = b'_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = b'_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & = b'_n \end{cases}$$

où $r = \operatorname{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n-r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathcal{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.