6

Espaces vectoriels, applications linéaires, matrices

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	
Matrices définies par blocs.	Interprétation géométrique des blocs.
Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Structure d'espace vectoriel

1 Définition

Définition 1 : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps. On appelle **loi de composition externe** sur E toute application

$$\cdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array} \right.$$

On appelle **espace vectoriel sur $\mathbb{K}$** ou **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E et $\cdot$ est une loi de composition externe sur E.
- $(E, +)$ est un groupe abélien d'élément neutre noté 0_E ou 0_E.
- *Pseudo-distributivité à droite* :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x.$$
- *Pseudo-distributivité à gauche* :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$
- *Pseudo-associativité* :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x).$$
- *Pseudo-élément neutre* : $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$.

Définition 2 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire tout famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\lambda_i \neq 0$ pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs de E, on appelle **combinaison linéaire** de $x_1,\dots,x_n$, tout vecteur de la forme $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).
Si $\mathscr{F} = (x_i)_{i\in I}$, les combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{F}$ sont les $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Propriété 1 : Produit cartésien de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

Si $\left(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot}\right)$ et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors $(E\times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec les lois coordonnée à coordonnée : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x,y),(x',y') \in E\times F$,

$$(x,y) + (x',y') = \left(x \underset{E}{+} x', y \underset{F}{+} y'\right)$$

$$\lambda \cdot (x,y) = \left(\lambda \underset{E}{\cdot} x, \lambda \underset{F}{\cdot} y\right)$$

Remarque

R 1 – Se généralise, par récurrence, au produit de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Démonstration

Les propriétés sont héritées directement de celles de E et de F : il suffit de les écrire.
On a en particulier $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$. ■

Propriété 2 : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Si X est un ensemble non vide et $\left(F, \underset{F}{+}, \underset{F}{\cdot}\right)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(F^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions.

Démonstration

De nouveau, les propriétés sont héritées directement de celles de F : il suffit de les écrire.
On a en particulier 0_{F^X} est la fonction constamment égale à 0_F. ■

Propriété 3 : Espaces vectoriels classiques

Sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}^D, +, \cdot)$ *pour tout ensemble* D,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel, et, plus généralement, si* $\mathbb{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{L}$*, alors* $(\mathbb{L}, +, \times)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

2 Sous-espace vectoriel

Définition 3 : Sous-espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
On dit que $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de E lorsque $\left(F, +_{|F^2}, \cdot_{|\mathbb{K}\times F}\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 4 : Caractérisation de sous-espaces vectoriels

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E$$
$$\iff \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall x, y \in F, \quad x + y \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F, \quad \lambda x \in F \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} F \subset E \\ F \neq \varnothing \ (0_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad x + \lambda y \in F \\ (F \text{ stable par combin. linéaires}) \end{cases}$$

Démonstration

Comme pour les sous-groupes et les sous-anneaux : les propriétés sont hérités de celles sur E, seule la stabilité de F par combinaisons linéaires est nécessaire. ■

Voir exercice du TD : 1

3 Intersection de sous-espaces vectoriels

Propriété 5 : Intersection de sev

Soit $(F_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-espaces vectoriels de* E*. Alors* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de* E*.*

Démonstration

C'est en effet une partie non vide de E (continent 0_E) stable par combinaison linéaire (car les F_i le sont). ■

Remarque

R 2 – $\boxed{F \cup G \text{ est un sous-espace de } E \text{ ssi } F \subset G \text{ ou } G \subset F.}$

Si $F \cup G$ est un sous-espace de E et si $F \not\subset G$, alors on a $x \in F$ tel que $x \notin G$ et si $y \in G$, $x + y \in F \cup G$ car sous-espace et comme $x = (x+y) - y \notin G$, $x + y \notin G$ donc $x + y \in F$ et $y = (x+y) - x \in F$ donc $G \subset F$.

4 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Définition 4 : Sous-espaces vectoriels engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$.
On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par A le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.
On le note $\operatorname{Vect} A$ ou $\operatorname{Vect}_{\mathbb{K}} A$.
Si $F = \operatorname{Vect} A$, on dit que A **engendre** F ou que F est une **partie génératrice** de F.

Propriété 6 : Caractérisation d'un Vect

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $A \subset E$. $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\operatorname{Vect} A = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \; ; n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Démonstration

(i) $\displaystyle\bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$ est bien un sous-espace vectoriel contenant A.

Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel contenant A alors il contient $\displaystyle\bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$.

Il s'agit bien du plus petit sus-espace vectoriel contenant A.

(ii) On vérifie facilement que $\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel contenant A par caractérisation.

Réciproquement, tout sous-espace vectoriel contenant A contient nécessairement $\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*, x_1, \ldots, x_n \in A, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$. ■

Remarque

R 3 – Si A est finie, $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p) &= \left\{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \; ; \; (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\} \\ &= \mathbb{K} x_1 + \cdots + \mathbb{K} x_p.\end{aligned}$$

R 4 – $\operatorname{Vect} A \subset F$ sev $\iff A \subset F \iff \forall x \in A, \quad x \in F$.

R 5 – Si $A \subset B$, alors $\operatorname{Vect} A \subset \operatorname{Vect} B$.

Méthode 1 : Passer de famille génératrice à équations

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.

Méthode 2 : Passer d'équations à famille génératrice

Pour passer d'une système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.

Méthode 3 : Égalité de Vect

Pour montrer que $\operatorname{Vect} A = \operatorname{Vect} B$, on montre que

$$A \subset \operatorname{Vect} B$$

puis que

$$B \subset \operatorname{Vect} A.$$

5 Familles de vecteurs

Définition 5 : Familles liées, libres, génératrices, bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- La famille $\mathscr{F}$ est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :
$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Longrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 0.$$
- La famille $\mathscr{F}$ est dite **génératrice** de E (ou **engendre** E) lorsque tout vecteur de E est combinaison linéaire de ces vecteurs :
$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$
c'est-à-dire $E = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$.
- La famille $\mathscr{F}$ est une **base** de E lorsqu'elle est libre et génératrice dans E.

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de cœfficients $(\lambda_i)_i$ sont presque nulles).

Remarque

R 6 – Les couples de vecteurs liés sont les couples de vecteurs colinéaires, les triplets de vecteurs liés sont les triplets de vecteurs coplanaires.

⚠ Non colinéaires deux à deux ne suffit pas !
Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$ et $z = (1,1,0)$ sont non colinéaires deux à deux et pourtant, ils sont coplanaires donc linéairement dépendant.

R 7 – ⚠ Dire que x et y sont colinéaires, c'est dire qu'il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda x + \mu y = 0_E$, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ **OU** que $x = 0_E$.

R 8 – Une famille contenant 0_E est toujours liée.

Propriété 7 : Famille de polynômes à degrés étagés

*Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.*

Démonstration

Si $F = (P_1,\ldots,P_n)$ famille de polynômes non nuls à degrés étagés, avec $\deg P_i < \deg P_{i+1}$ et $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Si, par l'absurde, l'un des λ_i n'est pas nul, soit $p = \max\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$. Alors

$$-\lambda_p P_p = \underbrace{\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{p-1} P_{p-1}}_{\deg < \deg P_p}$$

avec $\lambda_p \neq 0$, ce qui est contradictoire. Donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et la famille est libre.

La démonstration s'étend au cas des familles infinies, les combinaisons linéaires étant toujours finies. ■

Exemple

E 1 – $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement $((X-a)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont libres et même des bases de $\mathbb{K}[X]$.

Méthode 4 : Montrer qu'une famille est liée

- Pour montrer qu'une famille est liée, on cherche une combinaison linéaire nulle non triviale de ses vecteurs.
- Cela peut parfois se faire par exemple en résolvant un système linéaire.
- On raisonne fréquemment par l'absurde et/ou par récurrence.
- On peut aussi utiliser un argument de dimension (s'il y a plus de vecteurs que la dimension, la famille est liée).

Méthode 5 : Montrer qu'une famille est libre

- Pour montrer qu'une famille est libre, on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs, et on montre qu'elle est triviale : tous les scalaires sont nuls.
- Il suffit aussi de concaténer des familles libres de vecteurs pris dans des sous-espaces en somme directe.
- Une famille de polynômes **non nuls** à degrés étagés est libre.
- On peut aussi, en dimension finie, utiliser un déterminant.
- Dans un espace préhilbertien, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
- On verra dans le cours de réduction qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre.

Exemple

E 2 – La famille $(1,\cos,\sin,\cos(2\cdot),\sin(2\cdot))$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Voir exercice du TD : 2

Définition – Propriété 1 : Coordonnées

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall\, x \in E,\ \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n,\ \ x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Le triplet $(x_1, \dots, x_n)$ est appelé n-uplet des **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Cette définition s'étend au cas où $\mathcal{B}$ est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

Remarque

R 9 – Unicité = libre, existence = génératrice

Démonstration

Le caractère générateur équivaut à l'existence.
S'il y a unicité, pour $x = 0_E$, on trouve que $\mathcal{B}$ est libre.
Si, réciproquement, $\mathcal{B}$ est libre, et si $(x_1, \dots, x_n)$ et $(x'_1, \dots, x'_n)$ conviennent, alors $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i) e_i = 0_E$ donc pour tout i, $x_i = x'_i$ car $\mathcal{B}$ est libre. ■

Définition – Propriété 2 : Bases canonique

On a appelle **bases canoniques** de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ les familles

- $((0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k^e}}{1}, 0, \dots, 0))_{1 \leqslant k \leqslant n}$,
- $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$,
- $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$,
- $\left(E_{i,j}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p}$.

Remarque

R 10 – L'existence et l'unicité de la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles fournissent des bases de $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$.

Propriété 8 : Sur-famille et sous-famille

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.
Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

Démonstration

- Si $\mathcal{F}$ sous-famille de $\mathcal{F}'$, alors
  - ⋆ si $\mathcal{F}$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale de vecteurs de $\mathcal{F}$ donc de $\mathcal{F}'$ égale au vecteur nul.
  - ⋆ si $\mathcal{F}$ est génératrice, tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ donc de $\mathcal{F}'$.
- Si $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{L}'$ est une sous-famille de $\mathcal{L}$, alors si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs de $\mathcal{L}$,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

donc en particulier, si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs de $\mathcal{L}'$,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$ ■

Propriété 9 : Complétion d'une famille libre

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n, y \in E$.

- $(x_1, \ldots, x_n, y)$ *libre* $\Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) \text{ libre} \\ y \notin \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$
- $(x_1, \ldots, x_n)$ *liée si et seulement s'il existe* $i_0 \in [\![1, n]\!]$ *tel que* $x_{i_0} \in \operatorname{Vect}\big((x_i)_{i \neq i_0}\big)$.
  Lorsque c'est le cas, on a alors
  $$\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}.$$

Démonstration

- $(\Longrightarrow)$ si $(x_1, \ldots, x_n, y)$, alors la sous-famille $(x_1, \ldots, x_n)$ l'est aussi et $y \notin \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ sinon la famille serait liée.
  $(\Longleftarrow)$ si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et $y \notin \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, alors si $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \mu y = \vec{0}$, $\mu = 0$ sinon $y \in \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, puis $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre. ■
- S'il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_{i_0} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}$, la contraposée de la propriété précédente nous dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée.
  Réciproquement, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, on a une combinaison linéaire non triviale des x_i égale à 0_E, ce qui permet d'écrire l'un des x_i comme combinaison linéaire des autres.
  Enfin, on a évidemment que $\operatorname{Vect}(x_i)_{i \neq i_0} \subset \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ et réciproquement, si on a $x_{i_0} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}$, alors pour tout i, $x_i \in \operatorname{Vect}\big((x_i)_{i \neq i_0}\big)$ donc $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset \operatorname{Vect}(x_i)_{i \neq i_0}$.

6 Sommes de sous-espaces vectoriels [MPI]

Définition 6 : Sommes de sev

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F_1 + \ldots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i = \{x_1 + \cdots + x_n \mid \forall\, i, \quad x_i \in F_i\}.$$

Ainsi,

$$x \in \sum_{i=1}^{n} F_i \Longleftrightarrow \exists\, (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad x = x_1 + \cdots + x_n.$$

Remarque

R 11 – ⚠ $\mathbb{K}x + \mathbb{K}y \neq \mathbb{K}(x+y)$, en général.

R 12 – ⚠ $F + F = F$, $F - F = F$, si G est un sous-espace de F, $F + G = F$.

R 13 – si $\lambda \neq 0$, $\lambda F = F$.

R 14 – ⚠ En général, $(F+G) \cap H \neq F \cap H + G \cap H$. Exemple : trois droites coplanaires.

Propriété 10

(i) *Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

(ii) *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E, alors*

$$\operatorname{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Vect} A_k.$$

Démonstration

Caractérisation des sous-espaces et vérifications directes. ∎

7 Somme directe [MPI]

Définition 7 : Somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que $F_1,\dots,F_n$ sont en **somme directe** lorsque pour tout $x \in F_1+\dots+F_n$, l'écriture $x = x_1+\dots+x_n$ où $\forall\, i,\ \ x_i \in F_i$ est unique.

On note alors

$$F_1+\dots+F_n = F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Remarque

R 15 – Comme pour des ensembles disjoints, il n'y a pas de notation pour dire que des sous-espaces sont en somme directe. La notation désigne la somme des sous-espaces, en rappelant que celle-ci est directe.

Propriété 11 : Caractérisation

$F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall\ (x_1,\dots,x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$,

$$x_1+\dots+x_n = 0_E \Longrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0_E.$$

Démonstration

Le sens $\Longrightarrow$ et immédiat (et sans intérêt), pour l'autre sens, si $x_1+\dots+x_n = x_1'+\dots+x_n'$ avec pour tout i, $x_i, x_i' \in F_i$, alors $\underbrace{(x_1-x_1')}_{\in F_1}+\dots+\underbrace{(x_n-x_n')}_{\in F_n} = 0_E$ donc $(x_1-x_1') = \dots = (x_n-x_n') = 0_E$. ∎

Propriété 12 : Cas de deux sous-espaces

Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F\cap G = \{0_E\}$.

⚠ *Le résultat est faux pour plus de deux sous-espaces.*

Démonstration

Si F et G sont en somme directe et si $x \in F\cap G$, $x = x + 0_E = 0_E + x \in F \oplus G$ donc $x = 0_E$ par unicité. On a aussi $0_E \in F\cap G$ car c'est un sous-espace.

Réciproquement, si $F\cap G = \{0_E\}$ et si $x+y = 0_E$ avec $x\in F$ et $y \in G$, alors $x = -y \in F\cap G = \{0_E\}$ donc $x = y = 0_E$ donc F et G sont en somme directe. ∎

Exemple

E 3 – Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}(1,0)$, $G = \mathbb{R}(0,1)$ et $H = \mathbb{R}(1,1)$ sont tels que $(1,0)+(0,1)-(1,1) = (0,0)$. La somme n'est pas directe et pourtant $F\cap G = G\cap H = H\cap F = F\cap G\cap H = \{0\}$.

8 Sous-espaces supplémentaires [MPI]

Définition 8 : Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
F et G sont dits **supplémentaires** dans E si et seulement si $E = F \oplus G$ c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E, \quad \exists!\, (x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G.$$

Remarque

R 16 – ⚠ Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'en est **jamais** un ! (Pourquoi ?)

Propriété 13

(i) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.

Méthode 6 : Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires

- Raisonner par analyse-synthèse : si on a une décomposition $x = a + b$, alors... $a = ...$ et $b = ...$ (unicité sous réserve d'existence), et réciproquement de tels a et b conviennent (d'où l'existence).
- Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ (en général plus facile) et $F + G = E$ (en général moins facile).
- En dimension finie, utiliser des bases (une concaténation de bases de chaque sev donne une base de l'espace entier, dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$) ou un argument de dimension $\dim F + \dim G = \dim E$ et, au choix, soit $F \cap G = \{0_E\}$, soit $F + G = E$: voir plus loin.
- Reconnaître les sous-espaces caractéristiques d'une symétrie ou d'une projection.
- Plus généralement, reconnaître les sous-espaces propres d'un endomorphisme diagonalisable (voir cours de réduction).
- Reconnaître, si F est de dimension finie dans un espace préhilbertien, une décomposition $F \oplus F^{\perp} = E$.

Exemple

E 4 – Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

E 5 – Les sous-espaces $B\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_{\deg B - 1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires

Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que $F_1, \dots, F_n$ **sont supplémentaires dans** E lorsque $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = E$ c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E, \quad \exists!\, (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n, \quad x = x_1 + \cdots + x_n.$$

Exemple

E 6 – $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si les $\mathbb{K}e_i$ sont supplémentaires dans E.

Voir exercice du TD : 3

II Dimension finie

1 Espace de dimension finie

Définition 10 : Espace de dimension finie

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

Exemple

E 7 – $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. Pourquoi ?

2 Dimension, bases extraites et incomplètes

Propriété 14 : Existence de bases et leur taille

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$.

- *E possède des bases.*
- *Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments.*

Démonstration

- Un espace de dimension finie possède une famille génératrice finie et donc une base d'après le théorème précédent.
- Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, de taille n et n' respectivement. Comme $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est génératrice, le lemme nous dit que $n \leqslant n'$. Par symétrie, $n = n'$. ■

Définition 11 : Dimension

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim E = 0$.
Sinon, on note $\dim E$ (ou $\dim_{\mathbb{K}} E$) le nombre de vecteurs de toute base de E.

Voir exercice du TD : 5, 7

Propriété 15 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs, toute famille libre de E possède au plus n vecteurs.

Démonstration

Conséquence du lemme en considérant une base comme une famille libre puis comme une famille génératrice. ■

Corollaire 1

Toute famille d'au moins $n+1$ vecteurs en dimension n est liée.

Théorème 1 : Caractérisation des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{B}$ une famille finie de vecteurs de E.
*$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si elle contient $n = \dim E$ vecteur et elle est libre **ou** génératrice.*

Démonstration

On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Le sens direct ne pose pas de problème.
Si $\mathscr{B}$ est libre et contient $n = \dim E$ vecteurs, elle contient autant de vecteurs qu'une famille génératrice de E donc est une base d'après le lemme.
Si $\mathscr{B}$ est génératrice et contient n vecteurs, alors si $\mathscr{B}$ était liée, on aurait i tel que $e_i \in \mathrm{Vect}\left(e_k\right)_{k\neq i}$. Alors $\mathscr{B}' = \left(e_k\right)_{k\neq i}$ serait encore génératrice et posséderait $n-1 < \dim E$ vecteurs, ce qui est contradictoire. ■

Remarque

R 17 – Dans la pratique, on montre que le famille est libre et possède le bon nombre de vecteurs.

Théorème 2 : de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0_E\}$. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{G}_0 = \left(v_1, \dots, v_p\right)$ une famille génératrice de E.

- Soit $\mathscr{G}_0$ est libre et c'est une base de E, c'est terminé.
- Soit $\mathscr{G}_0$ est liée, et on a i_0 tel que $v_{i_0} \in \mathrm{Vect}\left(v_i\right)_{i\neq i_0}$. Quitte à réordonner, on suppose $i_0 = n$. Soit $\mathscr{G}_1 = \left(v_1, \dots, v_{p-1}\right)$. Alors $E = \mathrm{Vect}\,\mathscr{G}_0 = \mathrm{Vect}\,\mathscr{G}_1$. On peut donc recommencer le raisonnement.

Le procédé s'arrête et on finit toujours par obtenir une base de E. ■

Théorème 3 : de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. On peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E.
De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{L}$ et $\mathscr{G}$ familles libre et génératrice de E respectivement. Soit

$$A = \{\text{taille}(\mathscr{L}')\ ;\ \mathscr{L}' \text{ libre obtenue par complétion de } \mathscr{L} \text{ avec des vecteurs de } \mathscr{G}\}$$

$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient la taille de $\mathscr{L}$) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ réalisant ce maximum.
On a $\mathrm{Vect}\,\mathscr{B} \subset E = \mathrm{Vect}\,\mathscr{G}$.

Si on a $v \in \mathscr{G}$ tel que $v \notin \operatorname{Vect}\mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}'$ obtenue en ajoutant v à $\mathscr{B}$ est une famille libre obtenue par complétion de $\mathscr{L}$ avec des vecteurs de $\mathscr{G}$ ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.

Donc $\mathscr{G} \subset \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ donc $E = \operatorname{Vect}\mathscr{G} \subset \mathscr{B} \subset E$ donc $E = \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de E. ■

Corollaire 2

Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une sous-famille libre de $\mathscr{G}$.

Alors on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L}$ soit une sous-famille de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ soit une sous-famille $\mathscr{G}$.

3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Propriété 16 : Base et dimension d'un produit cartésien

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des espaces de dimension finie, $E_1 \times \dots \times E_n$ l'est encore et

$$\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n.$$

Si E est de dimension finie, E^n l'est encore et $\dim E^n = n \dim E$.

Démonstration

Tout couple $(x, y) \in E \times F$ s'écrit de manière unique

$$x_1 (e_1, 0_F) + \cdots + x_p (e_p, 0_F) + y_1 (0_E, f_1) + \dots + y_n (0_E, f_n).$$ ■

4 Dimension des sous-espaces

Propriété 17 : dimension des sous-espaces

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E.

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement si $F = E$.

*L'entier $\dim E - \dim F$ est appelé **codimension** de F dans E.*

Démonstration

Soit $F = \{0_E\}$ et le résultat est direct.

Sinon, soit $A = \{\text{taille}(\mathscr{L})\ ;\ \mathscr{L} \text{ famille libre de vecteurs de } F\}$.

$A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ (contient 1) et majoré par $n = \dim E$. Donc A admet un plus grand élément. Soit $\mathscr{B}$ une famille libre de vecteurs de F réalisant ce maximum.

On a $\operatorname{Vect}\mathscr{B} \subset F$.

Si on a $v \in \mathscr{F}$ tel que $v \notin \operatorname{Vect}\mathscr{B}$, alors la famille $\mathscr{L}$ obtenue en ajoutant v à $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de F ce qui contredit la maximalité de $\mathscr{B}$.

Donc $F \subset \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ donc $F = \operatorname{Vect}\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}$ est une base de F.

Comme $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de E, $\dim F \leqslant \dim E$.

S'il y a égalité, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, donc $F = \operatorname{Vect}\mathscr{B} = E$. ■

Définition 12 : Droites, plans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de E, un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de E.

5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 13 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.
On appelle **rang** de $\mathscr{F}$ l'entier $\operatorname{rg}\mathscr{F} = \dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F})$.

Remarque

R 18 – Si E est de dimension finie n, alors $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant n$.

Propriété 18 : Rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{F}$ une famille d'éléments de E.

(i) *Si $\mathscr{F}'$ est une sous-famille de $\mathscr{F}$, $\operatorname{rg}\mathscr{F} \leqslant \operatorname{rg}\mathscr{F}$.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est finie, $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si elle contient $\operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs.*

Démonstration

(i) $\operatorname{Vect}\mathscr{F}' \subset \operatorname{Vect}\mathscr{F}$.

(ii) $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si c'est une base de $\operatorname{Vect}\mathscr{F}$ si et seulement si elle contient $\dim(\operatorname{Vect}\mathscr{F}) = \operatorname{rg}\mathscr{F}$ vecteurs (car c'est bien sûr une famille génératrice). ■

Remarque

R 19 – En dimension finie, la méthode du pivot de Gauß permet de déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

6 Somme directe et supplémentaire [MPI]

Propriété 19 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de dimension finie, $\mathscr{B}_{F_i}$ une base de F_i, $\mathscr{C}$ la famille obtenue en mettant bout à bout les $\mathscr{B}_{F_i}$ (concaténation).

On a toujours que $\mathscr{C}$ engendre $H = F_1 + \dots + F_n$, et, de plus,

les F_i sont en somme directe si et seulement si $\mathscr{C}$ est libre donc une base de H.

On dit alors que la base $\mathscr{C}$ de H est adaptée à la décomposition $H = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

On a alors $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Démonstration

Pour deux sous-espaces, mais valable dans le cas général.

- $F + G = \operatorname{Vect}\mathscr{B}_F + \operatorname{Vect}\mathscr{B}_G = \operatorname{Vect}\mathscr{C}$ donc $\mathscr{C}$ engendre H.
- Si F et G sont en somme directe, alors on a déjà vu que $\mathscr{C}$ est libre : si

$$\underbrace{\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p}_{\in F} + \underbrace{\mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q}_{\in G} = 0_E$$

alors $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_q g_q = 0_E$ car F et G sont en somme directe, donc tous les cœfficients sont nuls car $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont libres. Donc $\mathscr{C}$ l'est.

- Si $\mathscr{C}$ est libre, alors si $x+y=\vec{0}$ avec $x\in F$ et $y\in G$, comme x et y se décomposent dans $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ respectivement et comme $\mathscr{C}$ est libre, on obtient $x=y=0_E$ et F et G sont en somme directe.

Corollaire 3 : dimension d'une somme

Soient $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, alors $\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^n \dim F_i$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration

Avec les même notation que précédemment, $\mathscr{C}$ engendre $\sum_{i=1}^n F_i$ donc $\sum_{i=1}^n F_i$ est de dimension finie et $\dim\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)\leqslant$ taille$(\mathscr{C})=\sum_{i=1}^n \dim F_i$.
La propriété précédent nous dit qu'il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire 4 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces de E.
$F_1,\dots,F_n$ sont supplémentaires dans E (ie $E=F_1\oplus\cdots\oplus F_n$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E=F_1+\cdots+F_n$.
2. *La somme est directe.*
3. $\dim E=\sum_{i=1}^n \dim F_i$.

Remarque

R 20 – En particulier, pour deux sous-espaces, F et G sont supplémentaires dans E (ie $E=F\oplus G$) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1. $E=F+G$.
2. $F\cap G=\{0_E\}$
3. $\dim E=\dim F+\dim G$.

Démonstration

- Si 1 et 2 sont vrais, c'est la définition.
- Si 1 et 3 sont vrais, la somme est directe d'après la propriété précédente.
- Si 2 et 3 sont vrais, $F_1\oplus\cdots\oplus F_n$ est un sous-espace de E de même dimension, donc $F_1\oplus\cdots\oplus F_n=E$.

Corollaire 5 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.
De plus, si $p=\dim F$ et $n=\dim E$, tout supplémentaire de F est de codimension p, c'est-à-dire de dimension $n-p$.

Démonstration

Il suffit de compléter une base de F (famille libre) en une base de E (Théorème de la base incomplète). ∎

Exercice 1

Soient $n\in\mathbb{N}$, $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et pour tout $i\in[\![0,n]\!]$,

$$F_i=\left\{P\in\mathbb{K}_n[X],\ \forall j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\},\ \ P(x_j)=0\right\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $\mathbb{K}_n[X]=\bigoplus_{i=0}^{n}F_i$.

7 Formule de Grassmann

Propriété 20 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Voir exercice du TD : 6

III Applications linéaires

1 Généralités

a Définition

Définition 14 : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u:E\to F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases}\forall x,y\in E, & u\big(x+y\big)=u(x)+u(v)\\ \forall x\in E,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K}, & u(\lambda x)=\lambda u(x)\end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall x,y\in E,\ \ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ u\big(x+\lambda y\big)=u(x)+\lambda u(v).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E=F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E)=\mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E=F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $u\in\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que f est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})=E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarque

R 21 – Ne pas confondre E^* et $E\setminus\{0_E\}$.

R 22 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemple

E 8 – Dérivation, intégration.

E 9 – Homothéties vectorielles

E 10 – Morphisme d'évaluation de E^D dans E.

E 11 – Morphisme des fonctions polynomiales associées aux polynômes.

E 12 – La trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 13 – La transposition sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

b Propriétés

Propriété 21

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u\in\mathscr{L}(E,F)$.

(i) $u(0_E)=0_F$

(ii) $\forall\, x_1,\dots,x_n\in E,\ \ \forall\,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i).$$

(iii) *Si A est une partie de E, $u(\operatorname{Vect} A)=\operatorname{Vect}(u(A))$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'}\in\mathscr{L}(E',F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1}\in\mathscr{L}(F,E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$, $v\circ u\in\mathscr{L}(E,G)$.*

(viii) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

(i) $2u(0_E)=u(0_E+0_E)=u(0_E)$. (Propriété de morphisme de groupes)

(ii) Récurrence.

(iii) Si $x\in\operatorname{Vect} A$, on a $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in A$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $x=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$ et donc $u(x)=\sum_{i=1}^n\lambda_i u(x_i)\in\operatorname{Vect}(u(A))$.

Si $y\in\operatorname{Vect}(u(A))$, on a $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in A$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $y=\sum_{i=1}^n\lambda_i u(x_i)$ et donc $y=u\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\in u(\operatorname{Vect} A)$.

(iv) Immédiat.

(v) Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$ bijective, $y_1,y_2\in F$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
On a $x_1,x_2\in E$ tels que $y_1=u(x_1)$ et $y_2=u(x_2)$.
Alors $u^{-1}(y_1+\lambda y_2)=u^{-1}(u(x_1)+\lambda u(x_2))=u^{-1}\circ u(x_1+\lambda x_2)=x_1+\lambda x_2=u^{-1}(y_1)+\lambda u^{-1}(y_2)$ en utilisant la linéarité de u.

(vi) Sous-espace vectoriel de F^E sans difficulté.

(vii) Si $x_1,x_2\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $v\circ u(x_1+\lambda x_2)=v(u(x_1)+\lambda u(x_2))=v\circ u(x_1)+\lambda v\circ u(x_2)$ par linéarité de u puis de v.

(viii) $(v_1+\lambda v_2)\circ u=v_1\circ u+\lambda v_2\circ u$ est toujours vrai, $v\circ(u_1+\lambda u_2)=v\circ u_1+\lambda v\circ u_2$ provient de la linéarité de v.

(ix) ■ $u(E') \subset F$, $u(E') \neq \varnothing$ car $0_F = u(\underbrace{0_E}_{\in E'}) \in u(E')$ et si $x_1, x_2 \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$u(x_1) + \lambda u(x_2) = u(\underbrace{x_1 + \lambda x_2}_{\in E'}) \in u(E').$$

■ $u^{-1}(F') \subset E$, $u^{-1}(F') \neq \varnothing$ car $u(0_E) = 0_F \in F'$ donc $0_E \in u^{-1}(F')$, et si $x_1, x_2 \in u^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u(x_1 + \lambda x_2) = \underbrace{u(x_1)}_{\in F'} + \lambda \underbrace{u(x_2)}_{\in F'} \in F'$ donc $x_1 + \lambda x_2 \in u^{-1}(F')$. ■

C Noyau et image

Définition 15 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} \in \mathscr{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(x) \; ; \; x \in E\} \in \mathscr{P}(F).$$

Remarque

R 23 – L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Propriété 22

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.

(ii) u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

(iii) u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker}(u_{|E'}) = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im}(u_{|E'}) = u(E')$.

Démonstration

(i) Image directe et réciproque des sous-groupes E et $\{0_F\}$.

(ii) Déjà vu pour les morphismes de groupes : on a toujours $0_E \in \operatorname{Ker} u$ et

- si u est injective,

$$x \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(x) = 0_F = u(0_E) \Rightarrow x = 0_E.$$

- si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ alors

$$u(x) = u(x') \Rightarrow u(x - x') = 0_F \Rightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow x = x'$$

par linéarité de u, donc u est injective.

(iii) Toujours vrai : u est surjective si et seulement si $\forall y \in F, \;\; \exists x \in E, \;\; u(x) = y$ si et seulement si $\forall y \in F, \;\; y \in u(E)$ si et seulement si $F \subset u(E)$; et $u(E) \subset F$ est toujours vrai.

(iv) $x \in \operatorname{Ker} u_{|E'} \iff x \in E'$ et $u(x) = 0_F$ et $y \in \operatorname{Im} u_{|E'} \iff \exists x \in E', \;\; u(x) = y \iff y \in u(E')$. ■

Voir exercice du TD : 13

d Rang

Propriété 23

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration

Si $E = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p))$ de dimension finie $\leqslant p$ et $\operatorname{Im} u$ sous-espace vectoriel de F. ■

Définition 16 : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Remarque

R 24 – On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété 24 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Démonstration

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.
  Si $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Im} u$, $v(\mathscr{B})$ est libre par injectivité de v et engendre $v(\operatorname{Im} u) = v \circ u(E) = \operatorname{Im}(v \circ u)$. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et
  $$\operatorname{rg}(v \circ u) = \text{taille}\,(v(\mathscr{B})) = \text{taille}\,(\mathscr{B}) = \operatorname{rg} u.$$
- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$.
  Or $\operatorname{Im} u = u(E) = u(v(G)) = \operatorname{Im}(u \circ v)$ donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$.

Voir exercice du TD : 19, 20

2 Endomorphismes

a Structure d'algèbre

Propriété 25

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ *est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si* $\dim E \geqslant 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition 17 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété 26

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ *est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Démonstration

La linéarité ne pose pas de problème, on a bien $1_{K[X]}(u) = \mathrm{id}_E$.

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q)(u) = \sum_{k,\ell} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \sum_k a_k u^k \left(\sum_\ell b_\ell u^\ell \right) = P(u) \circ Q(u)$ par linéarité de u. ∎

Remarque

R 25 – Deux polynômes en u commutent.

Propriété 27 : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

Voir exercice du TD : 14, 15, 18, 21, 22, 23

b Groupe linéaire

Définition 18 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété 28 : Structure

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration

C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ ou c'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$. ∎

Méthode 7 : Montrer l'inversibilité et trouver l'inverse avec un polynôme annulateur

Lorsque l'on a un polynôme P annulateur de u ayant un cœfficient constant, on isole le terme id_E dans un membre et on factorise par u dans l'autre : on obtient alors $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id}_E$ ce qui donne l'inversibilité, et l'expression de l'inverse sous forme de polynôme en u.

Exercice 2 : CCINP 62 (sauf 2.b)

Voir exercice du TD : 12

C Projecteurs

Définition 19 : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.
On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriété 29

Avec les notations ci-dessus :

- $p, q \in \mathscr{L}(E)$
- $p + q = \mathrm{id}_E$
- $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$

Démonstration

Propriété 30 : Caractérisation

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in (E)$ et $p^2 = p \circ p = p$.
Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$

(ii) *p est la projection sur*

$$F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Inv}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$$

parallèlement à $G = \mathrm{Ker}\, p$

Démonstration

Remarque

R 26 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 27 – On retiendra que

$$x \in F = \operatorname{Im} p \iff x \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(x) = x.$$

Exemple

E 14 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

Méthode 8 : Étude d'une projection

Reconnaître et étudier une projection, c'est

1. vérifier que $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$ pour un endomorphisme, ou $P^2 = P$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$.

Voir exercice du TD : 16, 17

d Symétries

Définition 20 : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 31

(i) $s \in \mathscr{L}(E)$

(ii) *Si p projection sur F parallèlement à G, $s = 2p - \mathrm{id}_E$.*

Propriété 32 : Caractérisation

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.
Le cas échéant,

(i) $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la symétrie par rapport à $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Remarque

R 28 – Si $F = \{0_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

Méthode 9 : Étude d'une symétrie

Reconnaître et étudier une symétrie, c'est

1. vérifier que $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ pour un endomorphisme, ou $S^2 = I_n$ pour une matrice.
2. Chercher $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(p + \mathrm{id}_E)$.

3 Détermination d'une application linéaire

a Image d'une base

Propriété 33 : Linéarité des formes i^e coordonnée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété 34 : Caractérisation par l'image d'une base

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(f_i\right)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ \ u(e_i) = f_i$.

Démonstration

Par analyse synthèse. ■

Corollaire 6 : Applications linéaires coïncidant sur une base

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété 35

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

Remarque

R 29 – $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

b Applications linéaires et dimensions

Propriété 36 : CNS pour que $\dim E = \dim F$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Remarque

R 30 – L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété 37

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est injective $\iff u$ est surjective $\iff u$ est bijective.

Remarque

R 31 – C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Démonstration

Image d'une base. ■

Exemple : Interpolation de Lagrange

E 15 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distinctsest facilement injectif (noyau réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$) et $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc c'est un isomorphisme, ce qui redonne le résultat de l'interpolation de Lagrange.

Exercice 3 : CCINP 55, 87, 90

Propriété 38

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) u isomorphisme
- (ii) u est inversible à gauche
- (iii) u est inversible à droite
- (iv) $\operatorname{rg} u = n$

c Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété 39

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration

Isomorphisme $u \mapsto u(\mathscr{B})$. ■

Remarque

R 32 – ⚠ $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

d Décomposition d'applications linéaires [MPI]

Théorème 4

Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et pour tout i, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout i, $u_{|E_i} = u_i$.

Démonstration

Analyse-synthèse. ■

4 Théorème du rang

Théorème 5 : et formule du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$.

Remarque

R 33 – ⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple

E 16 – $u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Corollaire 7

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

Exercice 4 : CCINP 64, 93 : question 1, 60

5 Formes linéaires et hyperplans

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 21 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et que (HP) $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé **espace dual** de E.

Remarque

R 34 – En dimension finie, $\dim E^* = \dim E$.

Voir exercice du TD : 24, 25

Définition 22 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Théorème 6 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan : noyau d'une forme linéaire non nulle $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, \quad H = \operatorname{Ker} \varphi$.*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

Corollaire 8

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker} \varphi_1 = \operatorname{Ker} \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$

Démonstration

Si $x_0 \notin H$, $\mathbb{K} x_0$ est un supplémentaire de H et $\varphi_1 = \dfrac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)} \varphi_2$. ■

Propriété 40 : Cas de la dimension finie

En dimension finie, les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$, donc de codimension 1.

Remarque : Équation d'un hyperplan

R 35 – Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker} \varphi$ un hyperplan.
Pour tout $x \in E$, $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ donc

$$\varphi(x) = x_1 \varphi(e_1) + \cdots + x_n \varphi(e_n).$$

Si on note $a_i = \varphi(e_i)$, on obtient

$$x \in H \iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.
La propriété précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Démonstration

Par récurrence sur m avec la formule de Grassmann. ■

Propriété 41 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

Démonstration

On complète une base de F en une base de E et on s'intéresse à la base duale. ■

Remarque

R 36 – Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n - p$ équations indépendantes.

6 Solutions des problèmes linéaires

Définition 23 : Problème linéaire

Un **problème linéaire** est un problème conduisant à une équation du type $u(x) = b$ où $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $b \in F$ un vecteur fixé, l'inconnue x étant un vecteur de E.

Propriété 42 : Structure de l'ensemble des solutions

L'ensemble des solution de cette équation est

- *soit vide (si $b \notin \operatorname{Im} u$)*
- *soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$, donc de la forme*

$$x_0 + \operatorname{Ker} u$$

où x_0 est une solution particulière et $\operatorname{Ker} u$ est l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $u(x) = 0_F$.

Démonstration

S'il y a une solution x_0, alors

$$u(x) = b = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \iff x \in x_0 + \operatorname{Ker} u.$$

■

Exemple

E 17 – Équations différentielles linéaires

E 18 – Suites arithmético-géométriques.

E 19 – Systèmes linéaires.

E 20 – Interpolation de Lagrange $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0),\dots,P(x_n)) \end{array} \right.$

Connaissant une solution P_0, l'ensemble des solutions est $P_0 + \operatorname{Ker} u$.

IV Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Sauf mention contraire, n,p,q,r,s désignent des entiers naturels non nuls.

1 Espaces de matrices

Propriété 43 : Espace vectoriel de matrices

(i) $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul* $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Remarque

R 37 – $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ (et non $n!$)

Définition 24 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \quad\;\uparrow & \\ \quad\;j & \end{array}$$

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété 44 : Cœfficients des matrices élémentaires

$\forall\, i,k \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j,\ell \in [\![1,p]\!],\quad (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.

Définition 25 : Produit matriciel

On définit

$$\times : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array} \right.$$

avec $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j \in [\![1,q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Remarque

R 38 – Si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A et $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B :

- $c_{i,j} = L_i \times C_j$.
- Les lignes de $A \times B$ sont $L_1 \times B, \dots, L_n \times B$.
- Les colonnes de $A \times B$ sont $A \times C_1, \dots, A \times C_q$.

R 39 – On retiendra que la multiplication à gauche agit sur les lignes, et la multiplication à droite sur les colonnes (comme les indices).

R 40 – ⚠ Il faut que les tailles soient compatibles pour multiplier des matrices.
Même si les matrices sont carrées, **le produit n'est pas commutatif** (sauf si $n = 1$!).

Propriété 45 : Bilinéarité, associativité, neutre

(i) ***Associativité*** *: Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$*

(ii) ***Bilinéarité*** *: Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $A \mapsto A \times B$ et $B \mapsto A \times B$ sont linéaires.*

(iii) ***Neutre*** *: Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.*

Propriété 46 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

Remarque

R 41 – ⚠ Les différentes $E_{\circ,\circ}$ ne vivent pas dans les mêmes espaces de matrices (ne sont pas de mêmes tailles.)

Démonstration

- **Première méthode** : poser le produit.
- **Deuxième méthode** : N étant le nombre de colonnes de $E_{i,j}$ et de lignes de $E_{k,\ell}$,

$$\begin{aligned}[E_{i,j} \times E_{k,\ell}]_{p,q} &= \sum_{m=1}^{N} [E_{i,j}]_{p,m} [E_{k,\ell}]_{m,q} = \sum_{m=1}^{N} \delta_{i,p}\delta_{j,m}\delta_{k,m}\delta_{\ell,q} = \left(\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)\delta_{i,p}\delta_{\ell,q} \\ &= \left(\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m}\right)[E_{i,\ell}]_{p,q}\end{aligned}$$

avec $\sum_{m=1}^{N} \delta_{j,m}\delta_{k,m} = 0$ si $j \neq k$ et 1 si $j = k$. D'où le résultat. ∎

Théorème 7 : Produit par blocs

Soit les matrices par blocs $M = \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array}$ et $N = \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array}$ où A, B, C, D, E, F, G, H sont des matrices de format correspondant. Alors

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m, r+s}(\mathbb{K}).$$

2 Transposition

Définition 26 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $A^\intercal \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left(A^\intercal\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

Remarque

R 42 – ${}^tA$ notation française. $A^\intercal$ notation anglo-saxonne, donc internationale.

Propriété 47 : de la transposition

Soit $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\intercal \end{array} \right.$

(*i*) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*,*

$$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$$

(*ii*) T *est* ***involutif*** *: si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*,* $(A^\intercal)^\intercal = A$*.*

(*iii*) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*,* $(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal$*.*

3 Matrices carrées

a La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Propriété 48 : Algèbre des matrices carrées

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que* $n \geqslant 2$*, d'élément unité* I_n*. Ainsi,* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* K*-algèbre de dimension* n^2*.*

Démonstration

- $\mathbb{K}$-espace vectoriel : ok.
- Anneau :
  - ⋆ $(\mathcal{M}_n(K), +)$ est un groupe abélien.
  - ⋆ $\times$ est une lci sur $\mathcal{M}_n(K)$.
  - ⋆ $\times$ est associative.
  - ⋆ $\times$ est distributive sur $+$ (par bilinéarité).
  - ⋆ I_n est neutre pour $\times$.
- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda(M \times N) = (\lambda M) \times N = M \times (\lambda N)$ par bilinéarité.
- $\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & & \\ & (0) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ & & \\ & (0) & \end{pmatrix}$ non commutatif.

■ $\begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & (0) & \\ & & \end{pmatrix}$ non intègre. ■

Propriété 49 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition 27 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des inversible de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$.

Propriété 50

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(ii) *Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.*

(iii) *Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

(iv) *Sont équivalentes :*

- *A est inversible*
- *A est inversible à gauche*
- *A est inversible à droite*
- *les colonnes de A forment une famille libre*
- *les lignes de A forment une famille libre*

(v) *Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.*

(vi) *$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et dans ce cas $(A^\intercal)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$*

Démonstration

(i) Groupe des inversibles.
(ii), (iii) et (v) Facile voire connu.
(iv) Admis provisoirement. ■

Méthode 10 : Calcul pratique

Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse, on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible.
- Reconnaître une matrice de passage (cf plus loin).
- Utiliser la formule de la comatrice si $n = 2$ ou 3 (voir déterminant).

Voir exercice du TD : 26 à 29, 33

b Matrices carrées particulières

Définition 28 : Matrices triangulaires, diagonales, scalaires

- On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i > j,\ \ m_{i,j} = 0$ (respectivement $\forall\, i < j,\ \ m_{i,j} = 0$.)
  On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.
  Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**
- On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i \neq j,\ \ m_{i,j} = 0$.
  On note $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}$.
  On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.
- On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On dit que $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad s_{i,j} = s_{j,i}$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.
- On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad a_{j,i} = -a_{i,j}$. On note $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Voir exercice du TD : 30

Remarque

R 43 – La diagonale d'une matrice antisymétrique est nécessairement nulle.

Propriété 51 : Sous-algèbres

$\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives

Remarque

R 44 – Si $0 \leqslant \ell \leqslant n$, $\begin{pmatrix} 0 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}^\ell = \begin{array}{c} \leftarrow \ell \rightarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & (\star) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété 52 : Sous-espaces supplémentaires

$\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de dimensions respectives

Démonstration

- **Preuve 1** : $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des parties non vides de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par combinaisons linéaires, donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - **Analyse** : Si $M = S + A$ avec des notations évidentes, $M^\top = S - A$ donc $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$.
  - **Synthèse** : On a bien $M = \frac{1}{2}(M+M^\top) + \frac{1}{2}(M-M^\top)$, $\left(\frac{1}{2}(M+M^\top)\right)^\top = \frac{1}{2}(M+M^\top)$ et $\left(\frac{1}{2}(M-M^\top)\right)^\top = -\frac{1}{2}(M-M^\top)$.

  D'où l'existence et l'unicité.
- **Preuve 2** :
  - $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(\left\{E_{i,i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \cup \left\{E_{i,j} + E_{j,i}\ ;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\right\}\right)$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
  - $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j} - E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$, la famille correspondante étant facilement libre, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
  - Ainsi $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) + \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - De plus, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$

Remarque

R 45 – L'inverse d'une matrice (inversible) (anti)symétrique l'est encore, mais c'est faux pour le produit en général.

C Trace d'une matrice carrée

Définition 29 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Propriété 53 : de la trace

(i) ***Linéarité*** : *Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$ *et* $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}\, A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

⚠ $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) \neq \mathrm{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

Exemple

E 21 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Voir exercice du TD : 31 à 32

V MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Définition 30 : Matrice d'une application linéaire

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
  - ⋆ Si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$, on appelle **matrice de x dans la base $\mathscr{B}$** la matrice colonne
  $$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
  - ⋆ Si $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
  Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on note $(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})$ les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$ (ie $x_j \underset{\mathscr{B}}{\longleftrightarrow} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$.)
  On appelle **matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$** la matrice rectangulaire
  $$\begin{aligned} A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_p) &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} X_1 & X_2 & \ldots & X_p \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{aligned}$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{F}$.
- Si E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{C}$ à l'arrivée** la matrice rectangulaire
  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$$
  On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{C}$ des images par u des vecteurs de $\mathscr{B}$.
  Lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on note
  $$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B})) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 54 : Isomorphisme de représentation matricielle

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)*

Remarque

R 46 – On retrouve le fait que $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$.

Propriété 55 : Traduction matricielle de l'évaluation

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Pour tout $x \in E$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

Propriété 56 : Traduction matricielle de la composée

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $\mathscr{D}$ une base de G, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$

et donc

Propriété 57 : Isomorphisme de représentation matricielle d'endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E. Alors $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}\right.$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

Exercice 5 : CCINP 71, 59 sauf 3

Voir exercice du TD : 43, 46

2 Application linéaire canoniquement associée

Définition 31 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée à** A l'unique $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Exemple

E 22 – $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$.

Application linéaire canoniquement associée : $u : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z) \end{array}\right.$

Définition 32 : Noyau, image, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A. On définit l'image, le noyau et le rang de A par :

$\mathrm{Ker}\, A = \left\{ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ correspondant à $\mathrm{Ker}\, u = \{x \in \mathbb{K}^p \mid u(x) = 0_{\mathbb{K}^p}\}$

$\mathrm{Im}\, A = \{AX \; ; \; X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$ correspondant à $\mathrm{Im}\, u = \{u(x) \; ; \; x \in \mathbb{K}^p\}$.

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, u = \dim(\mathrm{Im}\, A)$$

Propriété 58 : Lien avec les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(*i*) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ *où* $C_1, \dots, C_p$ *sont les colonnes de* A.

(*ii*) $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$.

(*iii*) ***Formule du rang*** : $\operatorname{rg} A + \dim(\operatorname{Ker} A) = p$.

Propriété 59 : CNS d'inversibilité

Sont équivalentes :

(*i*) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est inversible*

(*ii*) *Son application linéaire canoniquement associée* u *est un automorphisme*

(*iii*) $\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(*iv*) $\operatorname{rg} A = n$

Voir exercice du TD : 34, 36, 37, 38, 42

3 Changement de base

Définition 33 : Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage de** $\mathscr{B}$ **à** $\mathscr{B}'$ notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ dont les colonnes sont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{B}'$.

Autrement dit $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Propriété 60 : Inversibilité

Toute matrice de passage est inversible et $\left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Remarque

R 47 – La réciproque est vraie : toute matrice inversible est une matrice de passage.

R 48 – On en déduit une nouvelle méthode d'inversion de matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3') = u(\mathscr{B})$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} e_1' & = & e_1 + e_2 \\ e_2' & = & 2e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' & = & 2e_1 + e_2 + 2e_3 \end{array} \right. \iff \cdots \iff \left\{ \begin{array}{lcl} e_1 & = & -e_1' + 2e_2' - e_3' \\ e_2 & = & 2e_1' - 2e_2' + e_3' \\ e_3 & = & -e_2' + e_3' \end{array} \right.$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 61 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$.
Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors

$$\underset{\mathscr{B}}{X} = \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}} \times \underset{\mathscr{B}'}{X'}$$

Propriété 62 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux bases de F, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{C}'\to\mathscr{C}}{P_{\mathscr{C}'}^{\mathscr{C}}} \times \underset{\mathscr{C},\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad ie \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire 9 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases de E, $u \in \mathscr{L}(E)$.
Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Alors

$$\underset{\mathscr{B}'}{A'} = \underset{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}{P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}} \times \underset{\mathscr{B}}{A} \times \underset{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad ie \quad A = PA'P^{-1}$$

4 Matrices équivalentes

Définition 34 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathscr{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UBV$.
Cela signifie aussi que A et B représentent une même application linéaire.

Cela définit une relation d'équivalence.

Propriété 63 : Transposées de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si $A^\intercal$ et $B^\intercal$ le sont.

Théorème 8 : Rang et équivalence avec J_r

Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Remarque

R 49 – Par opérations élémentaires, on peut passer de A à J_r.
Les opérations sur les lignes se traduisent par la multiplication à gauche par des matrices inversibles, les opérations sur les colonnes se traduisent par la multiplication à droite par des matrices inversibles. On obtient alors explicitement U et V inversibles telles que $UAV = J_r$.

Corollaire 10

(i) *Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^\top)$.

(iii) *Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.*

Voir exercice du TD : 36, 47, 48

5 Matrices semblables

Définition 35 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite semblable à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$A = PBP^{-1}$$

C'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences s'appellent les classes de similitude.

Remarque

R 50 – Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.
En particulier, des matrices semblables ont même rang.

Propriété 64 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme.*

Méthode 11

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut introduire l'endomorphisme canoniquement associé à l'une et chercher une base dans laquelle on obtient l'autre.

Propriété 65 : Calculs avec des matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $A = PBP^{-1}$.

(i) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PB^kP^{-1}$

(ii) A *inversible ssi* B *l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans* $\mathbb{Z}$.

Propriété 66 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. La réciproque est fausse.

Définition 36 : trace d'un endomorphisme

Soit E $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u, notée $\operatorname{tr} u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 67 : de la trace

tr est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$ et si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Propriété 68 : à retenir ! Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs de E dont la somme vaut id_E. On note $F_1, \ldots, F_m$ les images de $p_1, \ldots, p_m$. Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$.

Voir exercice du TD : 39, 40, 44

6 Rang et matrices extraites

Définition 37 : Matrice extraite

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les cœfficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in I \times J$ avec $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$.

On notera $A|_{I\times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Propriété 69 : Caractérisation du rang

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

VI Opérations élémentaires

Il existe 3 types d'opérations élémentaires :

Les permutations (ou plus exactement transpositions) $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.

Les transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.

Les dilations $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

1 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

Permutations $L_i \leftrightarrow L_j$ (respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (respectivement à droite) par la **matrice de permutation** (et plus précisément transposition) :

$$P_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & (0) & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \vdots & & 1 & \vdots & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & (0) & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\quad i^{\text{e}} \qquad\qquad\quad j^{\text{e}} \end{array}$$

$P_{i,j}^2 = I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

Transvections $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ (respectivement $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (respectivement $T_{k,j}(\lambda)$ à droite : **bien remarquer la logique des indices !**) avec

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda & \cdots & 1 \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j^{\text{e}} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad i^{\text{e}} \end{array} = I_n + \lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda+\mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (respectivement $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (respectivement à droite) avec

$$D_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & & 1 & \\ & (0) & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \quad i^{\text{e}}$$

$D_i(\lambda)D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1} = D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

2 Propriétés des opérations élémentaires

Propriété 70 : des opérations élémentaires

(i) *Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.*

(ii) *Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.*

(iii) *Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.*

Démonstration

(i) Si P inversible, $AX = 0 \Longleftrightarrow (PA)X = 0$.

(ii) Si P inversible, $AX = (AP)(P^{-1}X)$ et $(AP)X = A(PX)$.

(iii) Une opération élémentaire donne une matrice équivalente. ■

3 Matrices échelonnées

Définition 38 : Matrice échelonnée

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Remarque

R 51 – Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

R 52 – Si une ligne (respectivement colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

Exemple

E 23 – $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en lignes. $2, 3, -4, 6$ sont appelés **pivots**.

E 24 – $B = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonnes. $-1, -1$ sont les pivots.

E 25 – $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

Propriété 71 : Toute matrice peut être échelonnée

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (respectivement colonnes.)

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (respectivement colonnes) de la matrice.

Démonstration

1. Si la matrice est nulle, elle est échelonnée.
2. Sinon, soit j_0 le numéro de la première colonne non nulle au moins un de ses cœfficients n'est pas nul, disons $a_{i_0,j_0} = p \neq 0$, ce sera un pivot : le mettre dans la première ligne grâce à $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
3. On annule ensuite tous les cœfficients de la première colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$. On obtient une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & \boxed{p} & * \quad \cdots \quad * \\ \cline{5-5} \vdots & & \vdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & A' \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

4. On recommence alors à l'étape 1 avec A', ce qui revient à agir sur les $n-1$ dernière lignes. Les opérations sur ces lignes ne changent pas la première.

4 Application au calcul du rang

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

Propriété 72 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (respectivement colonnes) est le nombre de lignes (respectivement colonnes) non nulles.

Démonstration

Sur les colonnes, si $C_{r+1},\dots,C_p$ sont les colonnes nulles, alors $C_1,\dots,C_r$ sont facilement libres grâce aux pivots et le rang vaut r. ■

5 Application à l'inversion de matrice

Propriété 73 : transformation en I_n

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

Démonstration

Sur les lignes, par exemple. Par pivot de Gauss, on se ramène à une matrice échelonnée en lignes, donc triangulaire supérieure, et inversible donc les cœfficients diagonaux sont tous non nuls :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Par $L_i \leftarrow \frac{1}{m_{i,i}} L_i$, on obtient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

puis par $\forall\, i = 1,\dots,n-1,\ \ L_i \leftarrow L_i - m'_{i,n} L_n$, on arrive à

$$M'' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & M'_1 & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où M'_1 a la même forme que M'. Il suffit de ré-appliquer l'étape suivante à M'_1, par récurrence (finie.) ■

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A.
- Sur les lignes : $P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n \Longrightarrow A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$.
- Sur les colonnes : $A Q_1 Q_2 \cdots Q_k = I_n \Longrightarrow A^{-1} = I_n Q_1 Q_2 \cdots Q_k$.

Corollaire 11 : Famille génératrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

Les matrice d'opérations élémentaires engendrent $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

6 Systèmes linéaires

a Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,p} \\ & & \\ a_{n,1} & & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,p} & b_1 \\ & & & \\ a_{n,1} & & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}.$$

Interprétations :

- **Matricielle** : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\boxed{(S) \iff Ax = b}$
- **Équation linéaire** : si u est l'application linéaire canoniquement associée à A,

$$\boxed{(S) \iff u(x) = b \iff x \in u^{-1}(\{b\})}$$

- **Formes linéaires** : Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$ φ_i la forme linéaire de $\mathbb{K}^p$ correspondant à la i^e (canoniquement associée à la i^e ligne de A) :

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p \end{array} \right.$$

alors $\boxed{(S) \iff \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \varphi_i(x) = b_i \iff x \in \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$

b Espace des solutions

Définition 39 : Rang d'un système

On appelle **rang** du système (S) le nombre $r = \operatorname{rg} S = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u \leqslant \min(n,p)$.

Propriété 74 : Structure de l'espace des solutions du système homogène

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $\dim \mathcal{S}_H = p - \operatorname{rg} S$.

Démonstration

$\mathcal{S}_H = \operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} A$. ∎

Propriété 75 : Structure de l'espace des solutions du système complet

L'ensemble des solution $\mathscr{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathscr{S}_S = x_0 + \mathscr{S}_H$ où $x_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathscr{S}_H$.

*Lorsque $\mathscr{S}_S = \varnothing$, le système est dit **incompatible**. Sinon il est **compatible**.*

Démonstration

C'est une équation linéaire $u(x) = b$. ■

Propriété 76 : Rang et nombre de solutions

(i) *Le système est dit de **Cramer** lorsque $n = p = \text{rg}(S)$ ie A inversible.*
Alors pour tout $b \in \mathbb{K}^n$, il y a une unique solution.

(ii) *Si $\text{rg}\, S = n$, le système a au moins une solution.*

(iii) *Si $\text{rg}\, S = p$, le système a au plus une solution.*

Démonstration

(ii) $\text{Im}\, u = \mathbb{K}^n$ donc u est surjective.
(iii) $\dim \text{Ker}\, u = p - r = 0$ donc $\mathscr{S}_S = \varnothing$ ou $\mathscr{S}_S = \left\{x^{(0)}\right\}$. ■

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} p_1 x_{i_1} + & \cdots & & & & = & b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + & \cdots & & & = & b'_2 \\ & & & & & \vdots & \\ & & p_r x_{i_r} + & \cdots & & = & b'_r \\ & & & 0 & & = & b'_{r+1} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & = & b'_n \end{array}\right.$$

où $r = \text{rg}(S)$, $i_1 < \ldots < i_r$, $p_1, \ldots, p_r$ non nuls, les $n - r$ dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si $\mathscr{S}_S = \varnothing$.

On tire successivement x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$ jusqu'à x_{i_1} en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension $n - r$.