

X 1991 – M' – Deuxième composition de Mathématiques – 4 heures (adapté)

Le but principal de ce problème est d'étudier la somme d'une série entière et de la relier à une expression intégrale. La partie I est consacrée à des préliminaires.

Partie I : Des sommes de Riemann pour une intégrale généralisée

On considère une fonction φ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$, continue, réelle, décroissante, strictement positive.

1. On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ est convergente.

a – Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$ est convergente pour tout $h > 0$.

b – Déterminer la limite de sa somme lorsque h tend vers 0.

2. On suppose seulement que l'intégrale $\int_0^1 \varphi(x) dx$ convergente. On désigne par $E(x)$ la partie entière d'un réel x et on pose

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1[\\ \sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k) & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$
$$c_k = \int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k), \quad \text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*$$
$$C = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$
$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \varphi(t) dt + C, \quad \text{pour tout } x \geq 0$$

a – Démontrer que C existe effectivement.

b – Vérifier que, si $\theta(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, $|\theta(x)| \leq 1$ pour $x \in]0, +\infty[$.

Indication : on pourra distinguer deux cas selon que $x < 1$ ou $x \geq 1$.

Partie II : Série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

On se propose d'étudier la fonction f somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, de sorte que l'on a $\frac{1}{\sqrt{n}} = A_n - A_{n-1}$, pour $n \geq 2$.

3. Préciser le rayon de convergence de cette série, ainsi que la limite de sa somme lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

4. Montrer que, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $f(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$.

Indication : on pourra poser $h = -\ln x$ et considérer la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. On donne la formule $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. On définit une fonction s sur $[0, +\infty[$ par

$$s(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in [0, 1[\\ \sum_{n=1}^{E(y)} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{si } y \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Vérifier que l'on a

$$f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy} dy$$

avec, comme plus haut, $h = -\ln x$.

6. a – Montrer que $f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ admet une limite L lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

b – Montrer que $L = (\sqrt{2} + 1)f(-1)$.

Partie III : Prolongement analytique de f

7. Déterminer l'ensemble des valeurs du nombre complexe x pour lesquelles la fonction $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2} - x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Sur l'ensemble ainsi mis en évidence, on pose

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - x}.$$

8. Montrer que f et g coïncident sur le disque ouvert $|x| < 1$.

Indication : on pourra développer $\frac{1}{1 - xe^{-u^2}}$.

9. Montrer que $g(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln|x|}$ tend vers 0 lorsque x est réel et tend vers $-\infty$.

Indication : on pourra poser

$$x = -e^{t^2}, \quad t \geq 0, \quad \varphi_t(u) = \frac{1}{e^{(u^2-t^2)} + 1},$$

puis minorer $\int_0^{+\infty} \varphi_t(u) du$ par $\int_0^{t-\varepsilon} \varphi_t(u) du$, où ε est un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon < t$, et majorer $\int_0^{+\infty} \varphi_t(u) du$ en l'écrivant sous la forme $\int_0^t \varphi_t(u) du + \int_t^{+\infty} \varphi_t(u) du$. Enfin, on montrera que $\int_t^{+\infty} e^{-u^2} du \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-t^2}}{2t}$.

Partie IV : Comportement de f sur le cercle-unité.

On suppose maintenant x complexe de module 1, de la forme $x = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On pose

$$\begin{cases} C(\theta) = \operatorname{Re} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}} \\ S(\theta) = \operatorname{Im} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

10. Justifier ces définitions.

Indication : on pourra introduire les sommes $s_p(\theta) = \sum_{n=1}^p \sin n\theta$ et $c_p(\theta) = \sum_{n=1}^p \cos n\theta$

11. a – Trouver une constante K telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{k\pi}{4n} \geq K\sqrt{n}.$$

b – La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$?

12. Démontrer, en utilisant une méthode analogue à celle de la question 8. que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]0, 2\pi[$. En déduire que

$$C(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} W_\theta(u) du$$

où on a posé

$$W_\alpha(u) = \frac{e^{u^2} \cos \theta - 1}{e^{2u^2} - 2e^{u^2} \cos \theta + 1}.$$

13. On fixe θ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer les zéros de W_θ , et de sa dérivée, le sens de variations de W_θ , sa valeur en 0 et sa limite lorsque u tend vers $+\infty$. Donner une esquisse de la courbe représentative.

14. Déterminer la limite de $C(\theta)$ lorsque θ tend vers 0 par valeurs positives.