1 **X** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. On définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$.

Solution de 1 : X

Supposons la suite $\left(\frac{S_n}{n!} x^n\right)$ bornée. En écrivant

$$\frac{u_n}{n!} x^n = \frac{S_n - S_{n-1}}{n!} x^n = \frac{S_n}{n!} x^n - \frac{x}{n} \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}$$

on en déduit que la suite $\left(\frac{u_n}{n!} x^n\right)$ est bornée.

Pour la réciproque, c'est un petit peu moins rapide, mais on peut écrire :

$$\frac{S_n}{n!} x^n = \frac{u_n}{n!} x^n + \frac{x}{n} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)} \frac{u_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n(n-1)\cdots 3} \frac{u_2}{2!} x^2 + \frac{x^{n-1}}{n(n-1)\cdots 3\times 2} \frac{u_1}{1!} x + u_0 \frac{x^n}{n!}$$

Supposons qu'il existe M tel que pour tout n on ait

$$\left|\frac{u_n}{n!} x^n\right| \leqslant M$$

On a alors

$$\left|\frac{S_n}{n!} x^n\right| \leqslant M\left(1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|x|^2}{n(n-1)} + \cdots + \frac{|x|^{n-2}}{n(n-1)\cdots 3} + \frac{|x|^{n-1}}{n(n-1)\cdots 3\times 2} + \frac{|x|^n}{n!}\right)$$

et on se trouve assez facilement convaincu que

$$\left|\frac{S_n}{n!} x^n\right| \leqslant M \exp(|x|)$$

D'où la réciproque, et l'égalité des rayons de convergence.

On peut aussi utiliser un produit de Cauchy de la série exponentielle par $\sum u_n x^n$.

2 Un lemme utile

Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant M\alpha^n$$

Ce lemme est utile lorsqu'une suite (a_n) est donnée par une relation de récurrence. On trouve $\alpha > 0$ tel que l'inégalité $|a_n| \leqslant M\alpha^n$ soit récurrente. On ajuste M pour que cette inégalité soit vraie pour les petites valeurs de n.

Si une suite (a_n) vérifie

$$\forall n \geqslant 2, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + 2a_{n-2}$$

montrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.

Solution de 2 : Un lemme utile

La série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement si il existe $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Donc si et seulement si il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| r^n \leqslant M$$

ce qui donne le résultat (en notant $\alpha = 1/r$).

Pour l'exemple : si $n \geqslant 2$, supposons que $a_{n-1} \leqslant M\alpha^{n-1}$ et $a_{n-2} \leqslant M\alpha^{n-2}$, α étant un réel > 0. Alors

$$|a_n| \leqslant M\left(\frac{\alpha^{n-1}}{n} + 2\alpha^{n-2}\right) = M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right) \leqslant M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $\frac{1}{2\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} \leqslant 1$, ce qui est facile (par exemple, $\alpha = 2$), ça marche, c'est récurrent. Et il suffit d'initialiser. On prend M tel que $|a_0| \leqslant M$ et $|a_1| \leqslant M\alpha$, l'initialisation est alors réalisée. Il existe donc un $\alpha > 0$ et un M tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant M\alpha^n$$

Donc la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. Et on peut même dire que ce rayon de convergence est supérieur ou égal à $1/\alpha$ pour n'importe quel α qui convient, donc supérieur ou égal à $1/2$ (on pourrait mieux faire).

3 Mines-Ponts – Fonctions complexes analytiques

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme.

1. Soit r un élément de $]0, R[$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
   (b) On note alors $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ dont on admet l'existence (une histoire de fonction continue sur un compact... cf plus tard !). Majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
   (c) Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?
2. (a) Montrer que pour $0 < r < R$,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2\,\mathrm{d}\theta.$$
   (b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?
   (c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)| \leqslant P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$ (ce qui généralise 1.(c)).
   On pourra étudier la limite lorsque $r \to +\infty$ du reste d'ordre N évalué en r et divisé par r^{2p} pour plusieurs valeurs de p.

Solution de 3 : Mines-Ponts – Fonctions complexes analytiques

1. (a) Si $0 \leqslant r < R$, on a $|re^{i\theta}| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta}$$

et donc, si n est un entier naturel,

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On peut alors se douter qu'il va s'agir d'un problème de permutation série-intégrale. Définissons (après avoir fixé $n \in \mathbb{N}$)

$$\phi_p \ : \ \theta \longmapsto a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On a $N_\infty(\phi_p) = |a_p| r^p$, donc $\sum_p N_\infty(\phi_p)$ converge (car $r < R$), donc $\sum \phi_p$ converge uniformément car normalement sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors permuter.

On peut aussi utiliser le théorème le plus fréquemment utilisé pour ce genre de permutation (parce qu'il ne demande pas la convergence uniforme, parce qu'il n'impose pas d'être sur un segment...), celui dont l'hypothèse cruciale est la convergence de $\sum N_1(\phi_p)$. Il suffit de remarquer que

$$N_1(\phi_p) \leqslant 2\pi |a_p| r^p$$

Bref, tout cela permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\,d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\,d\theta\right)$$

Or on calcule facilement (surtout sans repasser par cosinus et sinus !) :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\,d\theta = 0 \quad \text{si} \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$$

Si $k = 0$, le calcul est immédiat. On aboutit finalement à la formule souhaitée.

(b) Le cercle de centre 0 et de rayon r est un compact inclus dans le disque ouvert de convergence, donc f, continue, est bornée sur ce compact, ce qui justifie l'existence de $M(r)$. Une majoration d'intégrale standard donne alors

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$$

(c) Si $R = +\infty$ et si f est bornée, on peut majorer tous les $M(r)$ par un même M indépendant de r. On a alors

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$$

et en prenant la limite quand $r \to +\infty$, on trouve

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = 0$$

et donc f est constante.

Par exemple, le cosinus, le sinus sont constants (ça, c'est sûrement faux, mais pourquoi ?).

2. (a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n.$$

Puisque $\sum |a_n r^n|$ et $\sum |\overline{a_n} r^n|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum\left(\sum_{k=0}^{n} |a_k||\overline{a_{n-k}}|\right) r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n\,d\theta$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\,d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 r^{2m}.$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 - |f(0)|^2\right)\,d\theta.$$

Pour $0 < r < R$ suffisamment petit, par intégration d'une fonction négative, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et l'on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 0.$$

La fonction f est alors constante.

(c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right) - f_N\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta.$$

Or

$$0 \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right) - f_N\left(re^{i\theta}\right)\right|^2\,d\theta \leqslant 2\pi\left((P(r))^2 + \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| r^n\right)^2\right) = \underset{r\to+\infty}{O}\left(r^{2N}\right)$$

donc si $p \geqslant N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f\left(re^{i\theta}\right) - f_N\left(re^{i\theta}\right)\right|^2}{r^{2p}}\,d\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

Pour $p = N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leqslant \sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leqslant \frac{1}{r^2}\sum_{n=N+2}^{+\infty} |a_n|^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N+2, \ldots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \ldots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

4 Mines-Ponts Démontrer que ϕ définie par

$$\phi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen des fonctions usuelles (on utilisera deux méthodes : dérivation, et décomposition en éléments simples).

Solution de 4 : Mines-Ponts

La décomposition en éléments simples est la méthode la plus générale (y penser quand on vous demande de calculer $\sum F(n)z^n$ où F est une fraction rationnelle). On commence par constater que la série entière définissant ϕ converge normalement sur $[-1,1]$, d'où la continuité de la somme sur $[-1,1]$. Le calcul qui suit comporte une étape délicate : on coupe en deux la somme de la série. Pour cela, il est prudent (c'est même impératif !) de supposer $x\in]-1,1[$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)x^n\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\\&=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x\\&=(x+1)\ln(1+x)-x\end{aligned}$$

Et, par continuité, $\phi(1)=2\ln 2-1$, $\phi(-1)=-1$.

L'autre méthode est ici assez naturelle : on voit n au dénominateur, on dérive pour le simplifier. Mais attention là aussi, il faut prudemment rester dans $]-1,1[$. Le fait que ϕ soit continue sur tout $[-1,1]$ fermé ne prouve pas qu'elle soit dérivable sur $[-1,1]$.

On a donc

$$\forall x\in]-1,1[\qquad \phi'(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^{n-1}=\ln(1+x)$$

Comme une primitive de $\ln$ est $u\mapsto u\ln(u)-u$, on en déduit le résultat (pour « la constantre », on sait que $\phi(0)=0$).

5 Centrale – Décomposition en série entière d'une fonction rationnelle

1. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z-a}$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.
2. En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto \dfrac{1}{(z-a)^m}$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.
3. Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)
4. On écrit F sous forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x + 2y + 5z = n$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$.
   Montrer, si $|z| < 1$, que
$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
6. Donner un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

Solution de 5 : Centrale – Décomposition en série entière d'une fonction rationnelle

1. On essaye de se ramener à un dse classique : celui de $\dfrac{1}{1-u}$ sur $D(0,1)$. On écrit donc
$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\,\frac{1}{1-z/a}$$
et donc, sur $D(0,|a|)$,
$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^n}z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$$
Il n'est pas difficile de voir que le rayon de convergence de cette série entière est $|a|$.
2. Lorsqu'on cherche à passer du dse de $\dfrac{1}{1-z}$ à un dse de $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, on pense peut-être d'abord à la dérivation. Le problème est que dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver des fonctions d'une variable complexe. Intéressons-nous quand même à cette dérivation :
   Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, de
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$
on déduit
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$
Mais on peut dériver autant qu'on veut. On aura donc, en dérivant $m-1$ fois le dse de $1/(1-x)$ (on suppose $m \geqslant 2$),
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{(m-1)!}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty}\frac{n!}{(n-m+1)!}x^{n-m+1}$$
Ou encore, en arrangeant les expressions :
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty}\binom{n}{m-1}x^{n-m+1}$$
que l'on peut réindexer en
$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+m-1}{k}x^k$$
Voilà...pour une variable réelle. Il est à noter que seule notre ignorance nous empêche d'étendre ce qui vient d'être fait à une variable complexe ! mais dans le cadre du programme, une autre opération que la dérivation nous permet d'avancer : le produit de Cauchy. En effet, l'écriture
$$\frac{1}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{(z-a)^m}$$

nous permet, par récurrence, de conclure directement à la développabilité en série entière sur $D(0,|a|)$ de $z\mapsto 1/(z-a)^m$.
En revanche, cette technique par produit de Cauchy n'est pas idéale pour le calcul des coefficients. Définissons :

$$\forall m\geqslant 1\ \forall z\in D(0,|a|)\quad \frac{1}{(z-a)^m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{m,n}z^n$$

On a déjà

$$\forall n\geqslant 0\quad \alpha_{1,n}=\frac{-1}{a^{n+1}}$$

(dse de $1/(z-a)$, voir ce qui précède), puis, par produit de Cauchy :

$$\forall m\geqslant 1\quad \forall n\geqslant 0\qquad \alpha_{m+1,n}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_{m,k}\alpha_{1,n-k}$$

donc, par exemple, pour s'entraîner un peu :

$$\alpha_{2,n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{a^{k+1}}\frac{-1}{a^{n-k+1}}=\frac{n+1}{a^{n+2}}$$

Si on continue, les calculs sont moins pratique. Mais si on sait que

$$\forall m\geqslant 1\ \forall z\in D(0,|a|)\quad \frac{1}{(z-a)^m}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{m,n}z^n$$

alors, de

$$\frac{1}{(z-a)^m}=\frac{(-1)^m}{a^m}\frac{1}{(1-z/a)^m}$$

on déduit

$$\forall m\geqslant 1\ \forall u\in D(0,1)\quad \frac{1}{(1-u)^m}=(-a)^m\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{m,n}a^nu^n$$

$(z=au,\ u=z/a)$; ce dse est a fortiori valable sur $]-1,1[$ et donc, **par unicité du dse**, les coefficients sont ceux qu'on a calculés par dérivation :

$$\alpha_{m,n}=\frac{(-1)^m}{a^{n+m}}\binom{n+m-1}{n}$$

3. Appelons $a_1\dots,a_p$ les pôles de F (tous non nuls), de multiplicités respectives $m_1,\dots,m_p$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F(z)=E(z)+\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{\alpha_{j,k}}{(z-a_j)^k}\right)$$

les $\alpha_{j,k}$ étant des nombres complexes. La partie entière est polynomiale, donc développable en série entière sur $\mathbb{C}$. Par combinaison linéaire, F est au moins développable en série entère sur $D(0,r)$ où $r=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant p}(|a_j|)$. Mais s'il y a un pôle au moins double dont le module est égal à r, ou si plusieurs pôles ont pour module r, on ne peut exclure a priori que le rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières de rayon $\geqslant r$ soit strictement supérieur à r.
Cependant, ici, cela ne se peut. Supposons en effet

$$\forall z\in D(0,r),\quad F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_nz^n$$

et supposons que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n\mu_nz^n$ soit $R>r$. Notons alors, pour tout $z\in D(0,R)$,

$$G(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mu_nz^n$$

G coïncide avec F sur $D(0,r)$. Soit a_{i_0} un pôle de F tel que $|a_{i_0}|=r$. Alors

$$\left|G(ta_{i_0})\right|=\left|F(ta_{i_0})\right|\xrightarrow[t\to1^-]{}+\infty$$

Or $t\mapsto\left|G(ta_{i_0})\right|$ est continue sur le segment $[-1,1]$ donc bornée, ce qui est contradictoire.

4. Le produit QF d'une fonction polynôme, donc développable en série entière avec pour rayon de convergence $+\infty$, par F, développable en série entière avec pour rayon de convergence $r>0$, est développable en série entière au moins sur $D(0,r)$ par produit de Cauchy. Ecrivons

$$\forall z \in D(0,|a|),\quad Q(z)F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n$$

Comme par ailleurs $QF=P$, on peut aussi écrire, pour tout $z\in D(0,|a|)$ (et plus généralement pour tout z qui n'est pas un pôle de F)

$$Q(z)F(z)=P(z)=\sum_{n=0}^{d} p_n z^n$$

(P est polynomial). Mais un développement polynomial est un développement en série entière particulier, l'unicité du développement en série entière s'applique donc et permet d'écrire

$$\forall n>d,\qquad v_n=0$$

ce qui, écrivant $Q(z)=q_0+q_1z+\ldots+q_\delta z^\delta$ et utilisant la formule qui donne le produit de Cauchy, donne

$$\forall n>d,\quad \sum_{k=0}^{\delta} q_k\mu_{n-k} \;=\; 0$$

($\displaystyle\sum_{\mu=0}^{+\infty}\mu_n z^n$ désignant toujours le dse de F). Mais $q_0\neq 0$ (0 n'est pas pôle de F), on obtient donc

$$\forall n>d\qquad \mu_n=-\sum_{k=1}^{\delta}\frac{q_k}{q_0}\mu_{n-k} \;=\; -\frac{q_1}{q_0}\mu_{n-1}-\ldots-\frac{q_\delta}{q_0}\mu_{n-\delta}$$

5. On va calculer le dse de $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$ de deux manières.
<u>Par produit de Cauchy :</u> Notons, ici,

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n z^n\ ,\qquad \frac{1}{1-z^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n z^n\ ,\qquad \frac{1}{1-z^5}=\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n z^n.$$

On a, si on note $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\delta_n z^n$ et $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n$, pour tout n on a

$$c_n=\sum_{p+q=n}\delta_p\gamma_q=\sum_{p+q=n}\Big(\sum_{r+s=p}\alpha_r\beta_s\Big)\gamma_q=\sum_{r+s+q=n}\alpha_r\beta_s\gamma_q$$

(en effet, $\{(r,s,q)\in\mathbb{N}^3\ ;\ r+s+q=n\}=\displaystyle\bigcup_{q=0}^{n}\{(r,s,q)\in\mathbb{N}^3\ ;r+s=n-q\}$). Mais $\alpha_r=1$, $\beta_s=1$ si s pair, $\beta_s=0$ si s impair, $\gamma_q=1$ si $5|q$, $\gamma_q=0$ sinon. Donc $\alpha_r\beta_s\gamma_q=1$ si et seulement si $s=2y$ et $q=5z$, 0 sinon. On obtient donc $c_n=a_n$.

6. <u>Par décomposition en éléments simples :</u> On écrit

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} \;=\; \frac{k_1}{(1-z)^3}+\frac{k_2}{(1-z)^2}+\frac{k_3}{1-z}+\frac{k_4}{1+z}+\frac{k_5}{\omega-z}+\frac{k_6}{\omega^2-z}+\frac{k_7}{\omega^3-z}+\frac{k_8}{\omega^4-z}$$

avec par exemple $\omega=\exp(2i\pi/5)$. On sait développer en série entière chacun de ces éléments simples. Mais en se reportant à la question 2, on voit que le coefficients « de degré n » de ce développement est $\mathcal{O}(n)$ pour tous les éléments simples sauf le premier, qui est équivalent à quelquechose$\times n^2$. Donc on n'a besoin que de ce premier élément simple. Or

$$\frac{(1-z)^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}=\frac{1}{(1+z)(1+z+z^2+z^3+z^4)}$$

Donc $k_1=1/10$. Mais

$$\frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)z^{n-2}$$

(en dérivant deux fois le dse de $1/(1-z)$, ou en reprenant les formules vues plus haut). Donc

$$\frac{1}{(1-z)^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}z^n$$

et, finalement,

$$a_n\sim\frac{n^2}{20}$$

6 **ENS** Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ est développable en série entière, ses coefficients étant rationnels.

Solution de 6 : ENS

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ avec $R>0$. Alors

$$\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\frac{x}{e^x-1} \Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[,\ (e^x-1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)=x$$

$$\Leftrightarrow a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 2,\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{(n-k)!}=0$$

(en utilisant le produit de Cauchy et l'unicité du développement en série entière). D'où, finalement,

$$\forall x\in]-R,R[,\ f(x)=\frac{x}{e^x-1} \iff a_0=1 \text{ et } \forall p\geqslant 1,\ a_p=-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{(p+1-k)!}$$

Reste à s'occuper du rayon de convergence. On remarque que (voir exercice 2), si $|a_k|\leqslant M\alpha^k$ pour $k\in[\![0,p-1]\!]$, alors

$$|a_p|\leqslant M\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\alpha^k}{(p+1-k)!}=M\sum_{k=2}^{p+1}\frac{\alpha^{p+1-k}}{k!}\leqslant M\alpha^{p+1}e^{-\alpha}$$

Or, si $\alpha\leqslant e^\alpha$, l'hypothèse est récurrente, et il suffit de prendre $M=1$ pour que la récurrence soit initialisable. Mais tout $\alpha>0$ vérifie $\alpha\leqslant e^\alpha$, on en déduit que le rayon de convergence est $\geqslant\alpha$ pour tout $\alpha>0$, il est donc infini. Les a_k sont quant à eux rationnels par récurrence.

7 **ENS** Soit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence non nuls, de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$ est non nul. On note $h(z)$ la somme de cette série entière.
2. Montrer l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}$ tel que

$$\forall (z,z')\in V^2,\quad h(zz')=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(ze^{i\theta}\right)g\left(z'e^{-i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

Solution de 7 : ENS

1. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que, respectivement, les suites $(a_n z_1^n)$ et $(b_n z_2^n)$ soient bornées, la suite $(a_n b_n (z_1 z_2)^n)$ est bornée, et donc le rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$ est $\geqslant |z_1 z_2|$. On en déduit aussi que ce rayon de convergence est $\geqslant R_1 R_2$ où R_1 et R_2 sont les deux rayons des séries entières de départ.
2. Soit $r=\min(R_1,R_2)$. Supposons z et z' dans $D(0,r)$. La famille

$$\left(a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable (famille « produit » de deux famille sommables. Et sa somme vaut $f(ze^{i\theta})g(z'e^{-i\theta})$. Notons

$$\phi_{m,n}\ :\ \theta\longmapsto a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}$$

et notons que $\|\phi_{m,n}\|_\infty=|a_n||z|^n|b_m||z'|^m$. La famille $\left(\|\phi_{m,n}\|_\infty\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est donc sommable. Une bijection quelconque de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ permet de réindexer la famille $\left(\phi_{m,n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ et de l'écrire comme une suite $\left(\phi_{\alpha(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de fonctions normalement convergente sur le segment $[0,2\pi]$, ce qui autorise à intervertir :

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\phi_{\alpha(p)}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\phi_{\alpha(p)}$$

Mais les deux séries écrites dans cette égalité sont des sommes de familles sommables (autrement dit sont des séries absolument convergentes), donc commutativement sommables, on peut donc aussi bien écrire

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\phi_{m,n}\right)=\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\int_0^{2\pi}\phi_{m,n}$$

ce qui donne facilement le résultat, $\int_0^{2\pi}\phi_{m,n}$ valant 0 si $m\neq n$ et $2\pi a_n z^n b_n z'^n$ si $n=m$.

8 **ENS** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, q dans $\mathbb{C}^*$ tel que $|q| < R$ et $(b_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \sim q\, b_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{b_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

Solution de 8 : ENS

On remarque que $\dfrac{b_{n-1}}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} q$, et plus généralement que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{b_{n-k}}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} q^k$$

Soit, pour tout entier naturel k,

$$\phi_k \ :\ n \longmapsto \begin{cases} a_k \dfrac{b_{n-k}}{b_n} & \text{si} \quad n \geqslant k \\ 0 & \text{si} \quad n < k \end{cases}$$

Chaque ϕ_k, définie sur $\mathbb{N}$, a en $+\infty$ une limite : $a_k q^k$. Si on montre la convergence uniforme sur $\mathbb{N}$ (ou au moins sur un $[n_0, +\infty[$) de $\sum \phi_k$, on conclut par le théorème de la double limite. Fixons une petite « marge de manœuvre » : soit $r \in]|q|, R[$. Il existe un rang p tel que

$$\forall n \geqslant p \qquad \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right| \leqslant r$$

Donc, pour tous entiers naturels n et k tels que $n-k \geqslant p$,

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leqslant r^k$$

Mais pour faire mieux, soit

$$M = \max\left(\left|\frac{b_0}{b_1}\right|, \left|\frac{b_1}{b_2}\right|, \ldots, \left|\frac{b_{p-1}}{b_p}\right|\right)$$

Quitte à l'augmenter encore, on peut supposer $M \geqslant 1$. Réécrivons

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| = \left|\frac{b_{n-k}}{b_{n-k+1}}\right| \times \left|\frac{b_{n-k+1}}{b_{n-k+2}}\right| \times \cdots \times \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|$$

C'est le produit de k termes, dont au plus p ne peuvent être majorés que par M, et au moins $k-p$ majorables par r. Donc

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leqslant r^{k-p} M^p = \alpha r^k$$

La convergence normale de $\sum \phi_k$ en résulte, et le résultat.

9 Centrale

On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $I_0=1$.

1. Démontrer que, si $n\geqslant 1$, alors
$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$$
2. Démontrer que la série entière $S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n$ converge pour tout x dans $]-1,1[$.

   On note S sa somme.
3. Justifier que, pour tout $x\in]-1,1[$, on a $S'(x)=(1+x)S(x)$.
4. En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Solution de 9 : Centrale

1. Considérons s une involution de $\{1,\dots,n+1\}$. Ou bien elle fixe $n+1$. Dans ce cas, sa restriction à $[\![1,n]\!]$ est une involution de cet ensemble, et il y a I_n telles involutions. On bien elle envoie $n+1$ sur un entier k de $[\![1,n]\!]$. Dans ce cas, $s(k)=n+1$ et s agit comme une involution sur l'ensemble des $n-1$ entiers restants. Il y a n choix pour l'entier k et I_{n-1} choix pour l'involution résultante. On en déduit que
$$I_{n+1}=I_n+nI_{n-1}$$
2. Une involution est nécessairement bijective. Donc $I_n\leqslant n!$ ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série associée à S est supérieur ou égal à 1 .
3. On a
$$(1+x)S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{I_n}{n!}x^n+\sum_{n\geqslant 1}\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{I_n+nI_{n-1}}{n!}x^n.$$
   En utilisant le résultat de la première question, on obtient
$$(1+x)S(x)=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{I_{n+1}}{n!}x^n=S'(x)$$
4. La résolution de l'équation différentielle donne, compte tenu de la condition initiale $S(0)=1$,
$$S(x)=\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$
   On développe alors chaque exponentielle en série entière, et on réalise le produit de Cauchy de ces deux séries entières. Après quelques calculs laborieux, on trouve
$$I_{2p}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k)!}\text{ et }I_{2p+1}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(2p+1)!}{2^{(p-k)}(p-k)!(2k+1)!}$$

10 **Centrale** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$ puis déterminer un équivalent de sa somme quand x tend vers $+\infty$.

Solution de 10 : Centrale

Le rayon de convergence est $+\infty$. Il y a de bonnes raisons d'espérer que, si $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)=e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ce qui donnera

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e\times(e^x-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x+1}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il y a un rang, disons N, tel que

$$(n\geqslant N) \Longrightarrow \left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}e$$

(pourquoi ce e au second membre ? pour donner une preuve générique...voir plus loin). Découpons alors, pour tout $x\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\left|f(x)-g(x)\right| &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}\\ &\leqslant P_N(x)+\frac{\varepsilon}{2}e\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\ &\leqslant P_N(x)+\frac{\varepsilon}{2}g(x)\end{aligned}$$

On note alors que $P_N\ :\ x\longmapsto\sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}$, qui est une fonction polynôme, est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui permet de dire qu'il existe A tel que

$$\forall x\geqslant A \qquad P_N(x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}g(x)$$

En conclusion, on a montré

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A\qquad\forall x\geqslant A\qquad\left|f(x)-g(x)\right|\leqslant\varepsilon g(x)$$

Ou encore $f-g=\underset{+\infty}{\mathrm{o}}(g)$ qui est ce qu'il fallait prouver.

On pourra essayer de généraliser : si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ *est* $+\infty$*, si ls* a_n *sont strictement positifs, si* $b_n\sim a_n$*, le rayon de convergence de* $\sum b_n x^n$ *est* $+\infty$*, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n$$

.

11 **X** Etant donné une suite de carré sommable (a_n), on pose $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n-t}$ où la variable t est réelle.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2,1/2]$, la suite (a_n) l'est.

Solution de 11 : X

L'inégalité

$$\frac{|a_n|}{|n-t|}\leqslant\frac{1}{2}\left(|a_n|^2+\frac{1}{(n-t)^2}\right)$$

montre que le domaine de définition est $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^*$. Supposons alors $|t|<1$, on a

$$f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p}{n^p}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_n t^p}{n^{p+1}}\right)$$

Les calculs à l'envers en remplaçant t et a_n par leurs valeurs absolues montrent la sommabilité de la famille $\left(\frac{a_n t^p}{n^{p+1}}\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}_*\times\mathbf{N}}$. Ce qui permet d'intervertir les sommations et d'obtenir la développabilité en série entière. Si la somme est identiquement nulle sur $[-1/2,1/2]$, par unicité du développement en série entière on a

$$\forall p\in\mathbb{N}\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{p+1}}=0\tag{1}$$

Notant $\phi_n\ :\ p\longmapsto\frac{a_n}{n^{p+1}}$, définie sur **N**, $\|\phi_n\|_\infty=\frac{|a_n|}{n}$. On a bien convergence normale, on utilise alors la double limite pour prendre la limite quand $p\to+\infty$, on obtient $a_1=0$. On mutliplie alors (1) par 2^{p+1}, on fait tendre p vers $+\infty$, et ainsi, par récurrence, on arrive à la nullité de tous les a_n.

12 **X-ENS – Théorèmes taubériens** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ existe pour tout $x\in]-1,1[$ et $f(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}\ell\in\mathbb{C}$.

Démontrer que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme ℓ dans les cas suivants :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ \ a_n\geqslant0$
2. $a_n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
3. $\sum n|a_n|^2$ converge
4. $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\to0$

Ce sont des des conditions suffisantes pour que la réciproque du théorème d'Abel radial soit vraie. Le théorème taubérien de Hardy-Littlewood dit que la conclusion reste valable si $a_n=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *(voir sujet Mines-Ponts 2016, CCP 2005, X 1982...)*

Solution de 12 : X-ENS – Théorèmes taubériens

FGN 5 3.43

1. Dans ce cas, la fonction f est croissante sur $[0,1]$. On a donc, pour tout $x\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\leqslant\ell$, et, a fortiori, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N}a_nx''\leqslant\ell$. En faisant tendre x vers 1, on obtient $\sum_{n=0}^{N}a_n\leqslant\ell$. Ainsi $\sum a_n$ converge et sa somme est $\leqslant\ell$. Mais, d'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ majore f sur $[0,1]$, ce qui implique $\ell\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty\infty}a_n$ et l'égalité voulue.

2. Soit $\varepsilon>0$. Il s'agit de prouver qu'on a, pour N assez grand, $\delta_N=\left|\ell-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|\leqslant\varepsilon$. Pour ce faire, on effectue une découpe taubérienne : on introduit $f(x)$ en choisissant x convenablement (en fonction de N), pour contrôler chaque terme. Soit donc $x\in[0,1[$ et

$$\delta_N=\left|\ell-f(x)+f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\right|=\left|\ell-f(x)+\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_nx^n+\sum_{n=0}^{N}a_n(x^n-1)\right|$$

D'après l'inégalité triangulaire, la série entière convergeant absolument sur $[0,1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned}x_N&\leqslant|\ell-f(x)|+\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|x^n+\sum_{n=0}^{N}|a_n|(1-x^n)\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{n|a_n|}{N}x^n+(1-x)\sum_{n=0}^{N}|a_n|\left(1+x+\cdots+x^{n-1}\right)\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\frac{1}{N}\sup_{n\geqslant N}|na_n|\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n+(1-x)\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\frac{1}{N}\sup_{n\geqslant N}|na_n|\frac{x^{N+1}}{1-x}+(1-x)\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\frac{1}{N(1-x)}\sup_{n\geqslant N}|na_n|+(1-x)N\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\right)\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sup_{n\geqslant N}n|a_n|\xrightarrow[N\to\infty]{}0$ et, en vertu du théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

Il serait bon d'avoir $(1-x)N=1$. Rien ne nous en empêche : il suffit de prendre $x=1-\dfrac{1}{N}$. On a donc

$$\delta_N\leqslant\left|\ell-f\left(1-\frac{1}{N}\right)\right|+\sup_{n\geqslant N}|na_n|+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}n|a_n|$$

Corme $f(x)\xrightarrow[x\to1]{}\ell$, on a, pour N assez grand, $\delta_N\leqslant\varepsilon$.

3. Nous allons remettre en place la même idée, mais avec ces conditions, la majoration est plus technique. Tout d'abord, pour utiliser l'hypothèse dans nos majorations, nous allons naturellement introduire le reste de la série dont on sait qu'il tend vers 0 : pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} n\,|a_n|^2$. Un calcul immédiat donne, pour $n \geqslant 1$,

$$|a_n| = \sqrt{\frac{R_n - R_{n+1}}{n}}.$$

En reprenant les notations de la question précédente, on a toujours pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$,

$$\delta_N \leqslant |\ell - f(x)| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\, x^n + \sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n)$$

Occupons-nous du second terme. On écrit, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\, x^n\right)^2 &= \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\sqrt{n}\,\frac{x^n}{\sqrt{n}}\right)^2 \\ &\leqslant \underbrace{\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} n\,|a_n|^2\right)}_{=R_{N+1}}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}\right)\end{aligned}$$

On a clairement

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^2\right)^n = \frac{1}{N\,(1-x^2)} = \frac{1}{N(1-x)(1+x)} \leqslant \frac{1}{N(1-x)}$$

On obtient donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|\, x^n \leqslant \sqrt{\frac{R_{N+1}}{N(1-x)}}$$

Venons-en au troisième terme. On a, comme dans la question précédente,

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n) \leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n) &\leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N}\sqrt{nR_n - nR_{n+1}} \\ &\leqslant (1-x)\left(\sum_{n=1}^{N}(nR_n - nR_{n+1})\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{N} 1^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Un changement d'indice donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(nR_n - nR_{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N} nR_n - \sum_{n=2}^{N+1}(n-1)R_n \\ &= \sum_{n=1}^{N} R_n - N R_{N+1} \leqslant \sum_{n=1}^{N} R_n\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la majoration

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|(1-x^n) \leqslant (1-x)\left(\sum_{n=1}^{N} R_n\right)^{1/2}\sqrt{N} \leqslant (1-x)N\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} R_n\right)^{1/2}.$$

Là encore, tout nous pousse à prendre $x = 1 - \dfrac{1}{N}$. Il vient alors

$$\delta_N \leqslant \left|\ell - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| + \sqrt{R_{N+1}} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} R_n}$$

Ces trois termes tendent vers 0 lorsque N tend vers l'infini, le premier par hypothèse et le troisième en vertu du théorème de Cesàro. On a bien $delta_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

4. Cette fois-ci, il est naturel de poser pour $n>0$, $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k$ et $S_0=0$, ce qui conduit, pour $n\geqslant 1$, à

$$a_n=\frac{nS_n-(n-1)S_{n-1}}{n}=S_n-\frac{(n-1)}{n}S_{n-1}$$

On en déduit que, pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}a_nx^n&=\sum_{n=1}^{N}\left(S_nx^n-\frac{n-1}{n}S_{n-1}x^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}S_nx^n-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{n}{n+1}S_nx^{n+1}\\&=S_Nx^N+\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{nx}{n+1}\right)S_nx^n\end{aligned}$$

Pour $x=1$, on obtient $\sum_{n=1}^{N}a_n=S_N+\sum_{n=1}^{N-1}\dfrac{1}{n+1}S_n$. Pour x dans [0,1[, il vient, en faisant tendre N vers l'infini, puisque $S_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$,

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{nx}{n+1}\right)S_nx^n$$

Pour simplifier, on pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\left(1-\dfrac{nx}{n+1}\right)S_n$. Avec les mêmes observations que précédemment, on a, pour $x\in[0,1]$,

$$\begin{aligned}\delta_N&\leqslant|\ell-f(x)|+\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}a_n\right|\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\left|a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n-a_0-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|\\&\leqslant|\ell-f(x)|+\sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|x^n+\left|\sum_{n=1}^{N}u_nx^n-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|.\end{aligned}$$

Dans le second terme qui est égal à $\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{nx}{n+1}\right)S_nx^n$, on majore $|S_n|$ par $\sup_{n\geqslant N+1}|S_n|$ et on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left(1-\frac{nx}{n+1}\right)x^n&=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left((1-x)x^n+\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\\&\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}(1-x)x^n+\frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^{n+1}\\&\leqslant x^{N+1}+\frac{x^{N+2}}{N(1-x)}\leqslant 1+\frac{1}{N(1-x)}\end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|x^n\leqslant\sup_{n\geqslant N+1}|S_n|\left(1+\frac{1}{N(1-x)}\right).$$

On exprime le troisième terme en fonction des S_n. On obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{N}u_nx^n-\sum_{n=1}^{N}a_n\right|&=\left|\sum_{n=1}^{N}u_nx^n-S_N-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n+1}S_n\right|\\&=\left|\sum_{n=1}^{N}u_nx^n-\frac{N}{N+1}S_N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}S_n\right|\\&=\left|-\frac{N}{N+1}S_N+\sum_{n=1}^{N}\left(u_n-\frac{1}{n+1}S_n\right)x^n+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}S_n(x^n-1)\right|\\&=\left|-\frac{N}{N+1}S_N+\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n+1}(1-x)S_nx^n+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}S_n(x^n-1)\right|\end{aligned}$$

En remarquant, de nouveau, que $|(x^n-1)| \leqslant n(1-x)$, on en déduit que

$$\left|\sum_{n=1}^{N-1} u_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant |S_N| + 2(1-x)\sum_{n=1}^{N}|S_n|$$

Finalement, on a

$$\delta_N < |f - f(x)| + \sup_{n>N+1}|\delta_n|\left(1+\frac{1}{N(1-x)}\right) + |\delta_N| + 2(1-x)\sum_{n=1}^{N}|S_n|$$

On est invité à prendre à nouveau $N(1-x)=1$, ie $x = 1-\dfrac{1}{N}$ et dans ces conditions

$$\begin{aligned}\delta_N &\leqslant \left|\ell - f\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| + 2\sup_{n\to N+1}|S_n| + |S_N| + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}|S_n| \\ &\leqslant \left|\ell - f\left(1-\frac{1}{N}\right)\right| + 3\sup_{n>N}|S_n| + \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}|S_n|\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Cesàro, $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}|S_n|$ tend vers 0 puisque S_N tend vers 0 et finalement δ_N tend vers 0. Ce qu'on voulait.

La question 2 est le résultat initial démontré par Alfred Tauber en 1897. En 1911, Littlewood démontra que la conclusion demeure avec l'hypothèse plus. faible $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

On peut noter que les questions 2 et 3 ne sont que des cas particuliers de la question 4. En effet, si $a_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ la suite (na_n) tend vers 0 et le théorème de Cesàro permet de dire que $\dfrac{a_1+\cdots+na_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La convergence de $\sum n|a_n|^2$ implique également ce résultat. Pour le voir, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En écrivant $ka_k = \sqrt{k}\sqrt{k}a_k$, on a la majoration

$$\left|\sum_{k=p+1}^{n} ka_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} k|a_k|^2}$$

On en déduit que pour p fixé et $n \geqslant p$,

$$\frac{|a_1+\cdots+na_n|}{n} \leqslant \frac{|a_1+\cdots+pa_p|}{n} + \sqrt{R_p}$$

où $R_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{+\infty} k|a_k|^2$ est le reste d'une la série convergente. Pour $\varepsilon > 0$ est donné, on choisit p de sorte que $\sqrt{R_p} \leqslant \varepsilon$. Pour n assez grand on a alors $\dfrac{|a_1+\cdots+na_n|}{n} \leqslant 2\varepsilon$. Cela prouve bien que $\dfrac{a_1+\cdots+na_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

13 Formules de Newton et aplication à la méthode de Fadeev-Leverrier de calcul du polynôme caractéristique d'un matrice carrée

Soit $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les racines (complexes, pas nécessairement distinctes) du polynôme caractéristique χ_A de la matrice carrée d'ordre n (réelle ou complexe) A. On note

$$\chi_A(t) = t^n - p_1 t^{n-1} - \cdots - p_n$$

et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 :

$$s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k\ .$$

1. On veut démontrer que les p_i et les s_k sont liés entre eux par les formules suivantes, dites de Newton :

$$\text{si } 1 \leqslant k \leqslant n\ :\ kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \cdots - p_{k-1}s_1\ ;$$
$$\text{si } k \geqslant n+1\ :\ s_k = p_1 s_{k-1} + \cdots + p_n s_{k-n}\ .$$

   (a) On définit, si $u \in \mathbb{C}$,

$$f(u) = \prod_{i=1}^{n}(1 - u\lambda_i)$$

   Montrer que la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

   (b) Développer le polynôme $f(u)$ en exprimant ses coefficients à l'aide de $p_1,\ldots,p_n$.

   (c) Conclure.

2. Démontrer que, pour tout $k \geqslant 1$:

$$s_k = \operatorname{tr} A^k$$

3. On construit deux suites de matrices et une suite de nombres par l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
A_1 = A & q_1 = \operatorname{tr} A_1 & B_1 = A_1 - q_1 I_n \\
A_2 = AB_1 & 2q_2 = \operatorname{tr} A_2 & B_2 = A_2 - q_2 I_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_n = AB_{n-1} & nq_n = \operatorname{tr} A_n & B_n = A_n - q_n I_n
\end{array}$$

   (a) Montrer que les q_k sont les p_k en utilisant les formules de Newton.

   (b) Montrer que B_n est nulle.

4. On définit enfin le polynôme matriciel

$$Q(t) = t^{n-1} I_n + t^{n-2} B_1 + \cdots + B_{n-1}$$

   et on suppose connue une valeur propre λ de A. Démontrer que chaque colonne non nulle de la matrice $Q(\lambda)$ est un vecteur propre de la matrice A.

Solution de 13 : Formules de Newton et aplication à la méthode de Fadeev-Leverrier de calcul du polynôme caractéristique d'un matrice carrée

1. On a

$$\frac{f'}{f}(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - u\lambda_i}$$

   qui est développable en série entière sur $D(0,r)$ où $r = \max(|\lambda_i|)$ (on suppose les λ_i pas tous nuls, sinon il n'y a rien de difficile. De plus les termes avec les λ_i nuls disparaissent dans la somme ci-dessus). Sur ce disque ouvert,

$$\frac{f'}{f}(u) = -\sum_{k=0}^{+\infty} s_{k+1} u^k$$

   Mais d'autre part, si $u \neq 0$,

$$f(u) = u^n \chi_A(1/u) = 1 - p_1 u - \ldots - p_n u^n$$

   encore vrai si $u = 0$. Donc, sur $D(0,\delta)$,

$$p_1 + 2p_2 u + \ldots + np_n u^{n-1} = (1 - p_1 u - \ldots - p_n u^n)\sum_{k=0}^{+\infty} s_{k+1} u^k$$

   d'où la conclusion par produit de Cauchy.

2. Ensuite, expression de la trace dans le cas d'un polynôme caractéristique scindé.
3. Puis :
   $q_1 = s_1 = p_1$, $B_1 = A - s_1 I_n = A - p_1 I_n$.
   $A_2 = A^2 - p_1 A$, $2q_2 = s_2 - p_1 s_1 = 2p_2$, $B_2 = A^2 - p_1 A - p_2 I_n$, et on continue par récurrence (dans l'hypothèse de récurrence on doit faire figurer : $B_k = A^k - p_1 A^{k-1} - \ldots - p_k I_n$).
   La nullité de B_n vient alors du théorème de Cayley-Hamilton.
4. On calcule alors $AQ(\lambda)$, qui vaut $\sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} A_k$. Mais $A_k = B_k + p_k I_n$, donc

$$AQ(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} B_k + \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{n-k} \right) I_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k} B_k$$

   en posant $B_0 = I_n$. On trouve $AQ(\lambda) = \lambda Q(\lambda)$ ce qui conclut.

14 Formule de Ramanujan

On se propose d'établir la formule suivante, dûe à Ramanujan, et dont la première démonstration était basée sur les fonctions elliptiques :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k} \right)^2 \frac{4k^2-1}{2^{4k}(k+1)^2} .$$

On admettra les formules de Wallis, démontrées dans un exercice d'intégration :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \, dx = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \quad \text{et} \quad \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} .$$

En effectuant un calcul direct de l'intégrale d'une part, en utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1+u}$ d'autre part, démontrer l'égalité suivante, pour tout x de l'intervalle $[0,1[$:

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{1}{3}\left(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x^2}{2} - \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}} \frac{x^{2j}}{2j} .$$

Puis justifier que cette égalité est encore vraie pour $x = 1$. On remplace alors x par $\sin u$ dans l'égalité, et on intègre entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Montrer que l'on obtient la formule annoncée.

Des formules dûes à Ramanujan, la suivante est sans doute l'une des plus belles :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$