1 Montrer que $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

Solution de 1 :

Passer par les sommes partielles et utiliser la formule de Stirling.

Réponse : $\ln\dfrac{2}{\pi}$.

Soit $A\geqslant 1$ et $N=\lfloor A\rfloor$. Alors

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{(-1)^n}{x}\,\mathrm{d}x+\int_N^A\frac{(-1)^N}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+(-1)^{\lfloor A\rfloor}\ln\frac{A}{\lfloor A\rfloor}$$

On a déjà $1\leqslant\dfrac{1}{\lfloor A\rfloor}<1+\dfrac{1}{\lfloor A\rfloor}$ et $A\mapsto(-1)^{\lfloor A\rfloor}$ bornée donc $(-1)^{\lfloor A\rfloor}\ln\dfrac{A}{\lfloor A\rfloor}\xrightarrow[A\to+\infty]{}0$.

On continue le calcul en séparant dans la somme partielle les termes de rang pair et les termes de rang impair.

Supposons, sans perte de généralité, que N est impair et s'écrit $N=2p+1$ (si N est pair, cela revient à sortir un terme de la somme partielle, dont la limite est nulle). On écrit alors

$$\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{p}\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)=\ln\left(\frac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}p!^4}\right)=2\ln(2p)!+\ln(2p+1)-4p\ln 2-4\ln p!$$

La formule de Stirling permet d'écrire

$$\ln p!=\ln\left(\sqrt{2\pi p}\,p^p\mathrm{e}^{-p}\right)+\mathrm{o}(1)=p\ln p-p+\frac12\ln p+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)$$

et donc

$$\ln(2p)!=2p\ln(2p)-2p+\frac12\ln(2p)+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)=2p\ln p+2(\ln 2-1)p+\frac12\ln p+\frac12\ln(4\pi)+\mathrm{o}(1)$$

donc, en réinjectant,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2p}(-1)^n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)&=2\left(2p\ln p+2(\ln 2-1)p+\frac12\ln p+\frac12\ln(4\pi)+\mathrm{o}(1)\right)+\ln 2+\ln p+\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)}_{\to 0}-(4\ln 2)p-4\left(p\ln p-p+\frac12\ln p+\frac12\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)\right)\\&=\ln(4\pi)+\ln 2-2\ln(2\pi)+\mathrm{o}(1)\\&=\ln\frac{2}{\pi}+\mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{l'intégrale converge et sa valeur est }\ln\dfrac{2}{\pi}.}$

2 **Mines-Ponts** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, pour tout x réel,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant|P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

Solution de 2 : Mines-Ponts

Il existe un point x_0 tel que $P(x_0)=0$. Si x est un réel quelconque, pour tout $n\geqslant n_0$ on peut écrire

$$\left|f(x)-\left(f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n_0-1}}{(n_0-1)!}f^{(n_0-1)}(x_0)\right)\right|\leqslant\frac{(x-x_0)^n}{n!}\sup_{[x_0,x]}(|P|)$$

Quand $n\to+\infty$, le majorant tend vers 0, on en déduit que f est polynomiale (de degré au plus n_0-1).

3 Mines-Ponts

Soit $u_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer $u_n=\dfrac{\ln 2}{n}-\dfrac{\pi^2}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Solution de 3 : Mines-Ponts

On commence par l'habituel changement de variable $t=u^{1/n}$. Qui donne

$$u_n=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

On voit d'où vient le premier terme du développement asymptotique. On peut donc écrire

$$n\left(u_n-\frac{\ln 2}{n}\right)=\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Comment faire encore sortir un $1/n$? par exemple avec une intégration par parties (pas difficile à justifier) :

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\Big[\ln(1+u)\,(u^{1/n}-1)\Big]_0^1-\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u$$

Par théorème de convergence dominée (fonction dominatrice : $u\mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$), on voit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Le calcul de cette intégrale se fait avec une série entière :

$$\forall u\in]-1,1[\qquad \ln(1+u)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}u^k$$

On divise par u. En définissant $\phi_k(u)=\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}u^{k-1}$ on a, avec des notations habituelles,

$$N_1(\phi_k)=\frac{1}{k^2}$$

ce qui autorise l'interversion. On obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Or, de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

on déduit, séparant les indices pais et impairs (les deux séries convergent, c'est donc légitime) :

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}$$

...qui font bien $\pi^2/12$.

4 **Centrale** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$. Puis déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t$.

Solution de 4 : Centrale

Pour le calcul de l'intégrale, le changement de variable $u=\tan t$ est judicieux. Mais quand t varie sur $[0,\pi]$, cela pose quelques problèmes. On peut commencer par remarquer que $\cos$ prend les mêmes valeurs entre 0 et $\pi/2$ d'une part, entre $\pi/2$ et π d'autre part. On coupe l'intégrale en deux morceaux, on montre que ces deux morceaux sont égaux avec le changement de variable $s=\pi-t$. On obtient

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$$

Puis dans cette dernière intégrale on peut faire le changement de variable $u=\tan t$, ou plutôt $t=\mathrm{Arctan}\,u$. On obtient cette fois

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(1+\dfrac{1}{1+u^2}\right)}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{2+u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u/\sqrt{2}))^2}$$

On trouve finalement la valeur de l'intégrale : $\pi/\sqrt{2}$. Effectuons ensuite le changement de variable $t=u/n$, on a

$$\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}\frac{f\left(\frac{u}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$$

On coupe l'intégrale de droite en n intégrales sur les segments $[k\pi,(k+1)\pi]$ sur chacun desquels on fait le nouveau changement de variable $u=k\pi+v$ pour obtenir

$$\int_0^{\pi}\frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 v}\,\frac{f\left(\frac{v}{n}\right)+f\left(\frac{v+\pi}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{v+(n-1)\pi}{n}\right)}{n}\,\mathrm{d}v$$

L'étude de convergence simple de ce qu'il y a à l'intérieur fait appel à une somme de Riemann, ensuite on utilise le théorème de convergence dominée (domination par la fonction $t\mapsto N_\infty(f)$ par exemple), on obtient la limite :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi} f$$

5 Mines-Ponts ; ENS

Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t) \mathrm{d}t$ ait un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) \mathrm{d}t$ a un sens.

On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

Solution de 5 : Mines-Ponts ; ENS

FGN 5 1.3

Il y a deux manières pour l'intégrale d'avoir un sens. Et donc, d'abord, traitons l'énoncé suivant, très simple :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta} f(t)$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx} f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Solution :
Si $x > a$, $\forall t \in [0,+\infty[\quad \left|e^{-tx} f(t)\right| = e^{-tx}|f(t)| \leqslant e^{-ta}|f(t)| = \left|e^{-ta} f(t)\right|$
ce qui suffit pour conclure.

Posons-nous maintenant le problème plus difficile suivant :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\, dt$ converge. Démontrer que, si $x > a$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité)
Pour cela, toujours le même principe , on introduit la fonction

$$F : y \mapsto \int_0^y e^{-ta} f(t)\, dt$$

pour faire une intégration par parties dans $\int_0^A e^{-tx} f(t)\, dt)$

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-tx} f(t)\, dt &= \int_0^A e^{-ta} f(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t\\ &= \int_0^A F'(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t\\ &= \left[e^{-t(x-a)}\, F(t)\right]_{t=0}^{t=A} + (x-a)\int_0^A F(t)\, e^{-t(x-a)}\, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais d'une part

$$e^{-A(x-a)}\, F(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

(car F a une limite finie en $+\infty$) et d'autre part F est bornée (continue sur $[0,+\infty[$ et ayant une limite réelle en $+\infty$) donc $t \longmapsto F(t)\, e^{-t(x-a)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($t \longmapsto e^{-t(x-a)}$ l'est), ce qui conclut.

6 Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit $p,q>1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. Soit $a,b\in\mathbb{R}^+$ et $t>0$. Montrer que $ab\leqslant \dfrac{(at)^p}{p}+\dfrac{(b/t)^q}{q}$.
2. **Inégalité de Hölder** : Soit $a<b$ et $f,g:I\to\mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a
$$\int_I fg\leqslant\left(\int_I f^p\right)^{1/p}\left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$
On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p=\int_I g^q=1$.
3. **Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f,g:I\to\mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a
$$\left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_I f^p\right)^{1/p}+\left(\int_I g^p\right)^{1/p}$$
On pourra remarquer que
$$(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}.$$
4. On pose $a<b$ et on note $N_p(f)=\left(\displaystyle\int_a^b f^p\right)^{1/p}$ où $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ est une fonction continue.
Montrer que $N_p(f)\xrightarrow[p\to+\infty]{} N_\infty(f)=\sup\limits_I |f|$.
On pourra commencer par traiter le cas où $[a,b]=[0,1]$... *ou pas !*

Solution de 6 : Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski

FGN 5 1.29

1. Inégalité de concavité en composant par $\ln$.
2. Si $N_p(f)$ et $N_p(g)$ ne sont pas nuls, on peut remplacer f et g par $f_1=\dfrac{f}{N_p(f)}$ et $g_1=\dfrac{g}{N_p(g)}$ et on applique la question précédente à f_1g_1 avec $t=1$, ça donne l'intégrabilité de fg, puis on intègre sur I. On obtient $\displaystyle\int_I f_1g_1\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
On en déduit l'inégalité voulue.
Si, par exemple, $N_p(f)=0$ alors, f étant continue par morceaux sur I, quitte à découper l'intégrale sur des sous-intervalles sur lesquels f est continue (et positive), on obtient que f est nulle sauf éventuellement en des points isolés, et l'inégalité s'écrit $0\leqslant 0$.
3. On traite d'abord le cas où $I=[a,b]$.
On applique deux fois l'inégalité de Hölder en remarquant que $(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}$.
On conclut en traitant à part le cas où $\int_I(f+g)^p=0$.
Pour I intervalle quelconque, le cas précédent appliqué sur $[a,b]\subset I$ donne $\displaystyle\int_a^b fg\leqslant\left(\int_I f^p\right)^{1/p}+\left(\int_I g^p\right)^{1/p}$ ce qui, par positivité donne l'intégrabilité de $(f+g)^p$ et en passant aux limites, donne l'inégalité voulue.
4. Seul le cas où f est à valeurs réelles positives a de l'intérêt, sinon on l'applique à $|f|$. D'abord, de
$$\forall t\in[0,1]\qquad f(t)\leqslant\|f\|_\infty$$
on déduit
$$\forall t\in[0,1]\qquad f(t)^p\leqslant\|f\|_\infty^p$$
(on a bien sûr $p>0$, puisque ce qui nous intéresse est ce qui se passe quand $p\to+\infty$). En intégrant cette inégalité on déduit
$$\left(\int_0^1 f^p(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant\|f\|_\infty$$
et donc c'est une minoration qui nous importe.
f est continue sur le segment $[0,1]$, donc est bornée (on en a déjà tenu compte !) et atteint ses bornes. Soit donc $t_0\in[0,1]$ tel que
$$f(t_0)=\|f\|_\infty$$
Soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que
$$\forall t\in[t_0-\eta,t_0+\eta]\qquad f(t)\geqslant\|f\|_\infty-\frac{\varepsilon}{2}$$

(si $t_0=0$ ou $t_0=1$, on se contente d'écrire cela sur un segment $[0,\eta]$ ou sur un segment $[1-\eta,1]$, et on fait le même raisonnement). Alors, pour tout $p>0$,

$$\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} f^p(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 2\eta\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

et donc

$$\left(\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant (2\eta)^{1/p}\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Mais

$$(2\eta)^{1/p}\left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$$

(passer sous forme exponentielle-logarithme si on a un doute), donc il existe un p_0 tel que

$$\forall p \geqslant p_0 \qquad \left(\int_0^1 f^p(t)\ \mathrm{d}t\right)^{1/p} \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$$

On conclut. Le cas d'un segment $[a,b]$ se traite de la même manière, ou en se ramenant à $[0,1]$ par le changement de variable $t=a+(b-a)u$.

7 **X-ENS** Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)-2e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2=\int_0^{+\infty} f^2.$$

Solution de 7 : X-ENS

FGN 5 1.26

Le second terme de g fait penser à la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Posons $h:x\mapsto -2e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t$. La fonction h est de classe C^1 et $h'=-h-2f$. On a $g=f+h$ donc

$$g^2=f^2+2fh+h^2=f^2+h(h+2f)=f^2-hh'$$

Il reste à montrer que hh' a une intégrale nulle. Or,

$$\int_0^x h(t)h'(t)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{2}h(t)^2\right]_0^x=\frac{h^2(x)}{2}.$$

Il suffit donc de montrer que h tend vers 0 en $+\infty$ pour conclure. Si f tendait vers 0 en $+\infty$, on pourrait appliquer le théorème d'intégration des relations de comparaison (en $+\infty, e^x f(x)=o(e^x)$) et exp étant positive non intégrable en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t$ serait un $o(e^x)$, mais ce n'est pas forcément le cas.

On adapte la preuve de ce théorème d'intégration pour utiliser l'intégrabilité de f^2 avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A>0$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant\varepsilon^2$. Pour $x\geqslant A$, on a

$$\left|e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant e^{-x}\int_0^A |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t+e^{-x}\int_A^x |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_A^x |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{\int_A^x f(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_A^x e^{2t}\,\mathrm{d}t}\leqslant\varepsilon\sqrt{\frac{e^{2x}-e^{2A}}{2}}\leqslant\varepsilon e^x$$

On a donc, pour $x\geqslant A$,

$$\left|e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant e^{-x}\int_0^A |f(t)|e^t\,\mathrm{d}t+\varepsilon$$

Comme le premier terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on a

$$\left|e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant 2\varepsilon,$$

pour x assez grand.

8 **ENS** Soit f,g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et, si $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 fg^n$. Montrer que la suite $\left(I_n^{1/n}\right)$, puis la suite $\left(I_{n+1}/I_n\right)$, convergent vers $\max(g)$.

Solution de 8 : ENS

On commencera par une majoration simple (on dira évidemment que f et g sont strictement positives sur $[0,1]$, continues donc atteignant chacune un minimum et un maximum sur ce segment). On commence par une majoration simple :

$$\forall t\in[0,1]\qquad f(t)\,\left(g(t)\right)^n\leqslant f(t)\left(\max(g)\right)^n$$

d'où l'on tire

$$I_n^{1/n}\leqslant\max(g)\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/n}$$

et le majorant tend vers $\max(g)$.

Bien sûr, minorer, c'est un peu moins naturel. Il va sans doute falloir sortir les epsilons. Soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ et un segment J de longueur η inclus dans $[0,1]$ tel que

$$\forall t\in J\qquad g(t)\geqslant\max(g)-\frac{\varepsilon}{2}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $\max(g)-\dfrac{\varepsilon}{2}>0$).

Ensuite, il y a un peu de technique. L'histoire des I_{n+1}/I_n est nettement plus dure. On peut commencer par dire que

$$I_{n+1}\leqslant\max(g)I_n$$

mais c'est dans l'autre sens que, tout au moins si g atteint son maximum en une infinité de points, la rédaction est compliquée. On s'en sort autrement, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet de dire que

$$I_{n+1}^2\leqslant I_n I_{n+2}$$

et donc la suite de terme général I_{n+1}/I_n croît. Majorée par $\max(g)$, elle converge vers une limite $\ell>0$.

Donc la suite de terme général $\ln I_{n+1}-\ln I_n$ converge vers $\ln\ell$. Par le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln I_{k+1}-\ln I_k\right]\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$$

et le résultat sur $\left(I_n^{1/n}\right)$ permet alors de conclure.

9 **X-ENS : inégalité de Hardy** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $F : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$, F^2 l'est, et

$$\int_0^{+\infty} F^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2.$$

Solution de 9 : X-ENS : inégalité de Hardy

FGN 5 1.28

Cette inégalité, apparemment trouvée par Hardy, est un grand classique de l'oral. Assez purement technique, pas évidente, ce n'est pas pour autant un excellent exercice d'oral.

Commençons par remarquer que F se prolonge par continuité en 0 : si g est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, alors

$$F(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0) = f(0)$$

ce qui fait qu'il n'y a pas de problème en 0. Cela dit, F n'est pas a priori dérivable en 0, on fait donc une intégration par parties sur $[a,b]$, $0<a<b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b F^2 &= \left[-\frac{1}{x}\left(\int_0^x f\right)^2\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{x}f(x)\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[-xF^2(x)\right]_a^b + 2\int_a^b fF\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0, on utilise la positivité de $bF^2(b)$ et on obtient

$$\int_0^b F^2 \leqslant 2\int_0^b fF \leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2}\sqrt{\int_0^b F^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz).

Si F est nulle, f l'est et rien n'est à démontrer.

Sinon, au moins pour b assez grand, on peut diviser pour obtenir

$$\sqrt{\int_0^b F^2} \leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2}$$

ce qui permet de conclure en même temps à l'intégrabilité et à l'inégalité de Hardy.

10 X-ENS : inégalité de Kolmogorov

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable.

Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2.$$

Solution de 10 : X-ENS : inégalité de Kolmogorov

FGN 5 1.28

Soit $x \geqslant 0$. On peut écrire par intégration par parties

$$\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$$

Or, ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $\mathrm{A} \geqslant 0$,

$$\int_0^{\mathrm{A}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_0^{\mathrm{A}} f''^2} \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f''^2}$$

Dans ces conditions, $\int_0^x ff''$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$. Raisonnons par l'absurde et supposons f'^2 non intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Alors l'intégrale $\int_0^x f'^2(t)\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Étant donné ce qui précède, $f(x)f'(x)$ tend aussi vers $+\infty$ lorsque en $+\infty$. Cela implique classiquement que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}f^2(x) = +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f^2.

Ainsi, f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$et par un raisonnement analogue, on démontre qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_-$: donc f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. 2. L'intégration par parties faite à la question précédente assure que ff' admet une limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$ puisque f'^2 et ff'' sont intégrables. Ces limites sont forcément nulles car sinon la fonction intégrable f^2, de dérivée $2ff'$ aurait une limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$ ce qui est impossible. Ainsi, en prenant $y < x$ dans $\mathbb{R}$ pour écrire

$$\int_y^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(y)f'(y) - \int_y^x ff'',$$

et en faisant tendre x vers $+\infty$ et y vers $-\infty$, il vient $\int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff''$. Pour $A \geqslant 0$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f^2}\sqrt{\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f''^2} \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2},$$

puis, par passage à la limite,

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f'^2 = -\int_{\mathbb{R}} ff'' \leqslant \left|\int_{\mathbb{R}} ff''\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |ff''| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} f''^2}.$$

En élevant au carré, l'inégalité demandée est prouvée.

11 X

Étudier l'application

$$f\ :\ x \longmapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \frac{\cos t - \mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Solution de 11 : X

On voit assez facilement que le domaine de définition est $]0,+\infty[$. On définit alors, sur $]0,+\infty[^2$,

$$h\ :\ (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\frac{\cos t - \mathrm{e}^{-t}}{t}$$

qui vérifie toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$, avec domination sur tout segment :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t > 0 \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}\left|\cos t - \mathrm{e}^{-t}\right|$$

(on a supposé $a \leqslant b$). On calcule f', on en déduit f en utilisant le fait que la limite de f en $+\infty$ est nulle (tcvd).

12 Un classique

Soit f de classe $\mathscr{C}^p$ ($p \geqslant 1$) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose $f(a)=0$ ($a \in I$). Montrer qu'il existe g de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ sur I telle que

$$\forall x \in I \qquad f(x)=(x-a)g(x).$$

Indication : écrire $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ *puis faire un changement de variable dans l'intégrale.*

Solution de 12 : Un classique

Tout est dans l'indication ! Il faut savoir faire un changement de variable affine pour ramener une intégrale sur un segment quelconque à une intégrale sur $[0,1]$: ici, on fait le changement de variable

$$t=a+u(x-a)$$

On obtient

$$f(x)=(x-a)\int_0^1 f'(a+u(x-a))\,\mathrm{d}u$$

puis il n'y a plus qu'à appliquer soigneusement les théorèmes de classe C^k d'une fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,\mathrm{d}t$, on peut prendre ici des fonctions dominantes constantes.

13 ENS

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de $[0,1]$. On note P le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points x_i.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$(f-P)(x)=g(x)\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

2. On suppose $f \in \mathscr{C}^{p+1}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$(f-P)(x)=\frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

Solution de 13 : ENS

Pour la première question, il suffit de montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)}$$

qui est continue ailleurs qu'en les x_i a une limite finie en chaque x_i. Il suffit donc de montrer, pour chaque i, que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{x-x_i}$$

a une limite en x_i. Ce qui ramène à l'exercice précédent.

Pour la deuxième question, sans rapport avec la première (ce qui peut surprendre), on applique plusieurs fois le théorème de Rolle, voir exercices sur la dérivation.

14 ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

Pour $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^*)$, fonction 2π-périodique, on pose $I(f) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f'(t)}{f(t)} \, dt$.

1. I est-elle définie ?
2. En utilisant $\psi(t) = \exp\left(\displaystyle\int_0^t \dfrac{f'(\theta)}{f(\theta)} \, d\theta\right)$, montrer que $I(f) \in \mathbb{Z}$.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t) = P\left(e^{it}\right)$. On admet le théorème de d'Alembert-Gauß dans la question 3, mais pas dans la question 4.

3. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
4. En utilisant $P\left(re^{it}\right)$ pour r variable, donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß.

Solution de 14 : ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

FGN analyse 2 1.52

1. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^1$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de $I(f)$.
2. La fonction ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque $t \longmapsto \displaystyle\int_0^t \dfrac{f'}{f}$ est $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée vaut
$$\psi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \exp\left(\int_0^t \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} d\theta\right) = \frac{f'(t)}{f(t)} \psi(t)$$
Autrement dit, tout comme f, ψ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre $1, y' - \frac{f'}{f} y$. Il existe donc un réel K tel que $\psi = Kf$. Or f est 2π-périodique, donc ψ l'est aussi. Ainsi, $\psi(2\pi) = \psi(0) = 1$ et il en résulte que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{f'}{f} \in 2i\pi\mathbb{Z}$ et $I(f) \in \mathbb{Z}$.
3. On ne peut définir $I\left(f_P\right)$ que si la fonction f_P ne s'annule pas sur le cercle unité, c'est-à-dire si P n'a pas de racine de module 1. Faisons cette hypothèse et notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P où $n = \deg P$ (on sait que ces racines existent par le théorème de d'Alembert qu'on admet dans cette question). On sait que
$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_k}$$
On en déduit que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$,
$$\frac{f_P'(t)}{f_P(t)} = ie^{it} \frac{P'\left(e^{it}\right)}{P\left(e^{it}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{ie^{it}}{e^{it} - \alpha_k}$$
puis que
$$I\left(f_P\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - \alpha_k} \, dt$$
Pour calculer ces intégrales, nous effectuons un développement en série entière de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X - \alpha_k}$.
Il faut distinguer deux cas selon que $|\alpha_k|$ est supérieur ou inférieur à 1.
Si $|\alpha_k| < 1$, on écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{e^{it}}{e^{it} - \alpha_k} = \frac{1}{1 - \alpha_k e^{-it}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_k^p e^{-ipt}$$
Cette série étant normalement convergente, on peut intervertir sommation et intégration sur le segment $[0, 2\pi]$. On obtient
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - \alpha_k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_k^p \int_0^{2\pi} e^{-ipt} \, dt = 1$$
car seul le terme qui correspond à $p = 0$ n'est pas nul et vaut 2π. Si $|\alpha_k| > 1$, on écrit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{e^{it}}{e^{it} - \alpha_k} = -\frac{e^{it}}{\alpha_k} \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{\alpha_k}} = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{e^{i(p+1)t}}{\alpha_k^{p+1}}$$

Comme précédemment, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\alpha_k}=-\frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_k^{-(p+1)}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+1)t}\,\mathrm{d}t=0$$

car cette fois toutes les intégrales sont nulles. On déduit de ces calculs que $I\left(f_P\right)$ est égal au nombre de racines du polynôme P qui sont à l'intérieur du disque unité.

4. Démontrons le théorème de d'Alembert en raisonnant par l'absurde. Soit P un polynôme non constant, de degré n. On suppose donc que P ne possède pas de racine. Pour tout $r\geqslant 0$, la fonction φ_r définie par $\varphi_r(t)=P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ ne s'annule pas sur $[0,2\pi]$ et on peut définir $I\left(\varphi_r\right)$. On pose, pour tout $r\geqslant 0$,

$$F(r)=I\left(\varphi_r\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\mathrm{d}t$$

Vérifions que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

H1 Pour tout $t\in[0,2\pi]$, la fonction $r\longmapsto\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

H2 Pour tout $r\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $\mathbb{R}^+$.

H3 La fonction $z\longmapsto\dfrac{zP'(z)}{P(z)}$ est continue sur $\mathbb{C}$ et tend vers une limite finie quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

On en déduit qu'elle est bornée sur $\mathbb{C}$.

Il existe donc $\mathrm{K}>0$ tel que, pour tout $(r,t)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi]$ on ait $\left|\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\right|\leqslant K$ et une fonction constante est intégrable sur un segment.

Puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}^+$. Il est clair que $F(0)=0$.
On a donc $F(r)=0$ pour tout $r\geqslant 0$.

Calculons maintenant la limite de F en $+\infty$ en passant à la limite dans l'intégrale.
Quand $|z|$ tend vers $+\infty$, on a $\dfrac{zP'(z)}{P(z)}\sim n$ (quotient des termes de plus haut degré).
Justifions l'échange de la limite et de l'intégrale en utilisant le théorème de convergence dominée.

H1 Pour tout $t\in[0,2\pi]$, on a $\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}\xrightarrow[r\to+\infty]{}n$.

H2 Pour tout $r\in\mathbb{R}^+$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{P'\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $\mathbb{R}^+$.

H3 La même domination que la continuité convient.

Le théorème de convergence dominée s'applique et on obtient

$$F(r)\xrightarrow[r\to+\infty]{}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n\,\mathrm{d}t=n$$

Puisque $n\geqslant 1$ par hypothèse, cela est contradictoire avec le fait que F est nulle sur $\mathbb{R}_+$. L'hypothèse que P n'a pas de racine est donc absurde.

On peut démontrer, comme dans la question précédente, que pour toutes les valeurs de r pour lesquelles P n'a pas de racine de module r, $F(r)$ est égal au nombre de racines de P qui sont à l'intérieur du cercle de centre 0 de rayon r.

15 **Mines-Ponts** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite bornée. Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t$$

Solution de 15 : Mines-Ponts

Source : `ddmaths.free.fr`

La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \frac{t^p}{p!}.$$

De plus, sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment. Enfin,

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leqslant \|(a_n)\|_\infty \, \mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée. Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!}\mathrm{e}^{-2t}$$

H1 La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.

H2 Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.

H3 Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \left|f_p(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{\left|a_p\right|}{2^{p+1}} \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme général d'une série convergente.

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

16 Mines-Ponts

Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie et continue sur Ω.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
3. Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}(z) \to +\infty$.

Solution de 16 : Mines-Ponts

Source : `ddmaths.free.fr`

1. On applique le théorème de continuité sur Ω, il est encore valable pour une variable complexe.

H1 Pour tout $t \in]0,1]$, $z \mapsto \dfrac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω.

H2 Pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto \dfrac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$.

H3 Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant a\}$. Pour tous $z \in \Omega_a$ et $t \in]0,1]$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leqslant \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0,1]$ car continue et $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \to 0^+$.

Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur tout Ω_a. Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω.

2. On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x \to -1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

3. Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right| = \left|\mathrm{e}^{(z+1)\ln t}\right| = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)+1)\ln t} = t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1. On a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{} 0$$

Ainsi,

$$(z+1)f(z) \xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

17 Mines-Ponts

Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Solution de 17 : Mines-Ponts

Source : ddmaths.free.fr

Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Notons $u(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0,+\infty[$.

On montre la bonne définition et la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$:

H1 Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

H2 Pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

H3 Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in]0,+\infty[$,

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

On montre que f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

H1 Pour chaque $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x} : (x,t) \mapsto \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

H2 Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après ce qui précède.

H3 Pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$

H4 Soit $a > 0$.

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{(1+t^2)} = \psi_a(t)$$

avec ψ_a fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

On obtient f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$f' : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln(x)}{(x^2-1)}$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité. On a alors

$$f(x) - f(\varepsilon) = \int_\varepsilon^x \frac{\ln(t)}{(t^2-1)}\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{} \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Or $f(0) = 0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

18 Centrale

1. Déterminer le domaine de définition réel de
$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
2. Calculer $F(x)$.
3. En déduire les valeurs de
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
et de
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

Solution de 18 : Centrale

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Posons
$$f(x,\theta) = \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}.$$
La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie pour tout couple (x,θ) de $\mathbb{R}\times]0,\pi/2[$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\theta \mapsto f(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$ et
$$f(x,\theta) \xrightarrow[x\to 0^+]{} x \quad \text{et} \quad f(x,\theta) \xrightarrow[x\to(\pi/2)^-]{} 0$$
L'intégrale est faussement généralisée en ses deux bornes (prolongements par continuité) et donc converge. Finalement, $\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$
2. **H1** Pour tout $\theta \in]0,\pi/2[$, la fonction $x \mapsto f(x,\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec
$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,\theta) \mapsto \frac{1}{1+x^2\tan^2(\theta)}.$$
H2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto f(x,\theta)$ est intégrable sur $]0,\pi/2[$ d'après la question précédente.
H3 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi/2[$.
H4 Pour tout $(x,\theta) \in \mathbb{R}\times]0,\pi/2[$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,\theta)\right| \leqslant 1 = \varphi(\theta)$$
avec φ intégrable sur $]0,\pi/2[$.

Ainsi, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+x^2\tan^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$, à l'aide du changement de variable $\mathscr{C}^1$ bijectif $t = \tan(\theta)$
$$F'(x) =$$
Pour $x^2 \neq 0$ et $x^2 \neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction
$$\frac{1}{(1+x^2X)(1+X)}$$
et l'on en déduit en prenant t^2 au lieu de X
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2}$$
On peut alors poursuivre le calcul de $F'(x)$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$,
$$F'(x) = \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$
La fonction F' étant continue et paire, on obtient l'expression sur $\mathbb{R}$
$$\boxed{F'(x) = \frac{1}{|x|+1}\cdot\frac{\pi}{2}.}$$

Enfin, sachant $F(0)=0$, on conclut

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x\geqslant 0\\ -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

3. Pour $x=1$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Par intégration par parties,

$$\int_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon}\frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta=\underbrace{\Big[\theta\ln(\sin(\theta))\Big]_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon}}_{\longrightarrow 0}-\int_{\varepsilon}^{\pi/2-\varepsilon}\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2}\ln(2).}$$

19 **Centrale** On considère $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt$.

1. Montrer la définition et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que
$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{t e^{itx}}{1+t^2}\, dt.$$
3. Montrer que pour $x > 0$,
$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{u e^{iu}}{x^2+u^2}\, du$$
et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.
4. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Solution de 19 : Centrale

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Posons $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t) = \frac{e^{itx}}{1+t^2}.$$
La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a
$$|f(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \psi(t)$$
avec ψ intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$
2. Par intégration par parties,
$$\varphi(x) = -\frac{1}{ix} + \frac{1}{ix}\int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2}\, dt$$
La fonction
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{2te^{ix}}{(1+t^2)^2}\, dt$$
est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2}\right)\right| = \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{2}{1+t^2}.$$
On en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$\varphi'(x) = \frac{1}{ix^2} - \frac{1}{ix^2}\int_0^{+\infty} \frac{2te^{ix}}{(1+t^2)^2}\, dt + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2e^{itx}}{(1+t^2)^2}\, dt$$
Or, par intégration par parties,
$$\int_0^{+\infty} \frac{2te^{itx}}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{e^{itx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + ix\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+t^2}\, dt$$
donc
$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{2t^2e^{ixx}}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}e^{ixx}\, dt.$$
Enfin, une dernière intégration par parties donne
$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}e^{itx}\right]_0^{+\infty} + i\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2}e^{itx}\, dt$$
et la relation voulue...

3. Par le changement de variable $u = t\,x$, on obtient l'expression proposée.
   On peut décomposer
$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^1 \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{ci}u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$
   D'une part, par intégration par parties
$$\int_1^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$
   avec
$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty} = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$
   et
$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2+1} \underset{x\to0^+}{} 1.$$
   D'autre part,
$$\int_0^1 \frac{u\mathrm{c}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$
   avec
$$\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+u^2\right)\right]_0^1 \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x)$$
   et
$$\left|\int_0^1 \frac{u\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u < +\infty.$$
   Au final,
$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\ln(x) + \mathrm{o}(\ln(x)) + \mathrm{o}(1) \underset{x\to0^+}{\sim} \mathrm{i}\ln(x).$$

4. En vertu de ce qui précède
$$\mathrm{Im}\left(\varphi'(x)\right) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x) \to -\infty.$$
   On en déduit que la fonction réelle $\mathrm{Im}(\varphi)$ n'est pas dérivable en 0 , il en est a fortiori de même de φ.

20 Une nouvelle preuve de la formule de Stirling

On rappelle

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et que $\Gamma : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\,dt$ est définie et indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ et telle que $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. En réalisant le changement de variable $t = n + y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en

$$\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy$$

où $f_n(y) = 0$ pour $y \leqslant -\sqrt{n}$, $0 \leqslant f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{n} < y \leqslant 0$ et $0 \leqslant f_n(y) \leqslant (1+y)e^{-y}$ pour $y > 0$ et $n \geqslant 1$.

2. En appliquant le théorème de convergence dominée établir, la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$

Solution de 20 : Une nouvelle preuve de la formule de Stirling

Source : `ddmaths.free.fr`

1. Par le changement de variable proposé

$$\Gamma(n+1) = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy$$

avec

$$f_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant -\sqrt{n} \\ e^{-y\sqrt{n}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n & \text{si } y > -\sqrt{n} \end{cases}$$

Sur $\left]-\sqrt{n}, 0\right]$, une étude fonctionnelle montre

$$n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leqslant -\frac{y^2}{2}$$

qui donne $0 \leqslant f_n(y) \leqslant e^{-y^2/2}$.
Sur $[0,+\infty[$, une étude fonctionnelle montre

$$n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right) - y\sqrt{n} \leqslant -y + \ln(1+y)$$

pour $n \geqslant 1$. Cela donne $0 \leqslant f_n(y) \leqslant (1+y)e^{-y}$.

2. La fonction

$$\varphi : y \longmapsto \begin{cases} e^{-y^2/2} & \text{si } y \leqslant 0 \\ (1+y)e^{-y} & \text{sinon} \end{cases}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En réalisant un développement limité du contenu de l'exponentielle,

$$f_n(y) = e^{-y\sqrt{n} + n\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{n}}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-y^2/2}.$$

Par convergence dominée,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(y)\,dy \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}.$$