TD ✻ Intégration

1 Montrer que $I=\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

2 **Mines-Ponts** Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, pour tout x réel,

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\leqslant|P(x)|.$$

Que peut-on dire de f ?

3 **Mines-Ponts** Soit $u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrer $u_n=\frac{\ln 2}{n}-\frac{\pi^2}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4 **Centrale** Calculer $\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$. Puis déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\int_0^\pi\frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}\,\mathrm{d}t$.

5 **Mines-Ponts ; ENS** Soit f une fonction réelle continue sur $[0,+\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ta}f(t)\,\mathrm{d}t$ ait un sens. Démontrer que, si $x>a$, alors $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}f(t)\,\mathrm{d}t$ a un sens.

On pourra examiner deux cas : intégrabilité ou simple convergence, pour l'existence de la première intégrale.

6 **Ultra classique : inégalités de Hölder et de Minkowski** Soit $p,q>1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Soit $a,b\in\mathbb{R}^+$ et $t>0$. Montrer que $ab\leqslant\frac{(at)^p}{p}+\frac{(b/t)^q}{q}$.
2. **Inégalité de Hölder** : Soit $a<b$ et $f,g:I\to\mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que fg l'est et que l'on a
$$\int_I fg\leqslant\left(\int_I f^p\right)^{1/p}\left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$
On pourra commencer par traiter le cas où $\int_I f^p=\int_I g^q=1$.
3. **Inégalité de Minkowski** : Soit I intervalle, $f,g:I\to\mathbb{R}^+$ continues par morceaux telles que f^p et g^p soient intégrables. Montrer que $(f+g)^p$ l'est et que l'on a
$$\left(\int_I(f+g)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_I f^p\right)^{1/p}+\left(\int_I g^p\right)^{1/p}$$
On pourra remarquer que
$$(f+g)^p=f(f+g)^{p-1}+g(f+g)^{p-1}.$$
4. On pose $a<b$ et on note $N_p(f)=\left(\int_a^b f^p\right)^{1/p}$ où $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ est une fonction continue.
Montrer que $N_p(f)\xrightarrow[p\to+\infty]{}N_\infty(f)=\sup_I|f|$.
On pourra commencer par traiter le cas où $[a,b]=[0,1]$.

7 **X-ENS** Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue de carré intégrable.

On considère la fonction $g:x\mapsto f(x)-2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x\mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty}g^2=\int_0^{+\infty}f^2.$$

8 **ENS** Soit f,g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_*^+$ et, si $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 fg^n$. Montrer que la suite $\left(I_n^{1/n}\right)$, puis la suite $\left(I_{n+1}/I_n\right)$, convergent vers $\max(g)$.

9 **X-ENS : inégalité de Hardy** Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $F\ :\ x\mapsto\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$, F^2 l'est, et

$$\int_0^{+\infty}F^2\leqslant4\int_0^{+\infty}f^2.$$

10 **X-ENS : inégalité de Kolmogorov** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ avec f et f'' de carré intégrable.

Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f'^2\right)\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}f^2\int_{-\infty}^{+\infty}f''^2.$$

11 **X** Etudier l'application

$$f\ :\ x\longmapsto\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\frac{\cos t-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

12 **Un classique** Soit f de classe $\mathscr{C}^p$ $(p\geqslant1)$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose $f(a)=0$ $(a\in I)$. Montrer qu'il existe g de classe $\mathscr{C}^{p-1}$ sur I telle que

$$\forall x\in I\qquad f(x)=(x-a)g(x).$$

Indication : écrire $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ puis faire un changement de variable dans l'intégrale.

13 ENS

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ une subdivision de $[0,1]$. On note P le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points x_i.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $g\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x\in[0,1]$,
$$(f-P)(x)=g(x)\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$
2. On suppose $f\in\mathscr{C}^{p+1}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, il existe $c\in[0,1]$ tel que
$$(f-P)(x)=\frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

14 ENS : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß

Pour $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}^*)$, fonction 2π-périodique, on pose $I(f)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$.

1. I est-elle définie ?
2. En utilisant $\psi(t)=\exp\left(\displaystyle\int_0^t\frac{f'(\theta)}{f(\theta)}\mathrm{d}\theta\right)$, montrer que $I(f)\in\mathbb{Z}$.

Soit P un polynôme complexe. On pose $f_P(t)=P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$. On admet le théorème de d'Alembert-Gauß dans la question 3, mais pas dans la question 4.

3. Caractériser $I(f_P)$ à l'aide des zéros de P.
4. En utilisant $P\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ pour r variable, donner une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß.

15 Mines-Ponts

Soit $(a_n)_{n\geqslant0}$ une suite bornée. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t$$

16 Mines-Ponts

Soit $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>-1\}$. Si $z\in\Omega$, on pose
$$f(z)=\int_0^1\frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f est définie et continue sur Ω.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1 .
3. Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\mathrm{Re}(z)\to+\infty$.

17 Mines-Ponts

Montrer que, pour tout x réel positif,
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\ln(t)}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

18 Centrale

1. Déterminer le domaine de définition réel de
$$F(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
2. Calculer $F(x)$.
3. En déduire les valeurs de
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
et de
$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

19 Centrale

On considère $\varphi:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer la définie et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que
$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que pour $x>0$,
$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$
et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x\to0^+$.
4. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

20 Une nouvelle preuve de la formule de Stirling

On rappelle
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
et que $\Gamma:x\in\mathbb{R}_*^+\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ est définie et indéfiniment dérivable sur $]0;+\infty[$ et telle que $\Gamma(n+1)=n!$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. En réalisant le changement de variable $t=n+y\sqrt{n}$, transformer l'intégrale $\Gamma(n+1)$ en
$$\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(y)\mathrm{d}y$$
où $f_n(y)=0$ pour $y\leqslant-\sqrt{x}, 0\leqslant f_n(y)\leqslant\mathrm{e}^{-y^2/2}$ pour $-\sqrt{t}<y\leqslant0$ et $0\leqslant f_n(y)\leqslant(1+y)\mathrm{e}^{-y}$ pour $y>0$ et $t\geqslant1$.
2. En appliquant le théorème de convergence dominée établir, la formule de Stirling :
$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}.$$