Probabilités

- Bien connaître la définition d'une probabilité, en particulier la σ-additivité. Aucun développement théorique n'est attendu concernant la notion de tribu, mais la définition est au programme. Lorsque l'univers est fini ou dénombrable, on peut choisir $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et on définit une unique probabilité avec les probabilités des événements élémentaires, positives, sommables, de somme 1.
- Être négligeable ne signifie pas être vide. Être presque sûr ne signifie pas être égal à Ω.
  Pour montrer une propriété presque sûre, on peut penser à utiliser la continuité monotone.
  Notons que dans la définition d'un système complet d'événements, il faut que la réunion soit égale à Ω et pas seulement presque sûre.
- ⚠ Il n'y a toujours pas d'« événement conditionnel $A|B$ » (élément de $\mathscr{A}$) : $\mathbb{P}(A|B)$ n'est qu'une notation signifiant qu'on se place en observateur de l'événement A sachant que l'événement B est déjà réalisé. Mais la notation $\mathbb{P}_B$ peut aussi être trompeuse, car c'est la même que celle de la loi d'une variable aléatoire.
- L'emploi de la formule des probabilités composée correspond à une vision chronologique de la réalisation des événements : on réalise A_1, puis A_2 sachant que A_1 l'est, puis A_3 sachant que A_1 et A_2 le sont, etc.
- La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.
  ⚠ ne pas confondre $\mathbb{P}(B\cap A_i)$ et $\mathbb{P}(B \mid A_i)$!
- La formule permet de remonter le temps, appelée aussi formule de probabilité des causes.
- ⚠ Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si A et B sont incompatibles, $A\cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A\cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A\subset \overline{B}$ par exemple).
  Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion ensembliste, l'indépendance est une notion probabiliste : elle dépend de la probabilité dont est muni Ω.
  Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants.
- Quant à l'indépendance d'une famille de variables aléatoires, c'est une hypothèse très contraignante (la probabilité de l'intersection de toute sous-famille finie est égale au produit des probabilités) qui provient souvent d'une modélisation dans laquelle on se donne une probabilité pour que ce soit le cas. Elle est stable par passage au complémentaire de certains événements (valable aussi pour l'indépendance 2 à 2) et on peut prendre des réunions ou des intersections finies en conservant l'indépendance (non valable pour l'indépendance 2 à 2).

Exercices vus en cours

1 **CCINP 95 à 111**

2 On lance deux dés équilibrés et l'on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A,B,C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B\cap C$, ni de $B\cup C$.

3 **Indicatrice d'Euler** Soit $\Omega = [\![1,n]\!]$ où n est un entier non premier supérieur ou égal à 2, muni de la probabilité uniforme. Si $d|n$, on note $A_d = \{kd \mid k\in\Omega \text{ et } kd\in\Omega\}$.

1. Quelle est la probabilité de A_d ?
2. Soit P l'ensemble des diviseurs premiers de n.
   (a) Démontrer que $(A_p)_{p\in P}$ est une famille d'événements indépendants.
   (b) En déduire le cardinal $\varphi(n)$ de l'ensemble A des nombres inférieurs ou égaux à n et premiers avec n (indicatrice d'Euler).

4 Si $A_1,\dots,A_n$ sont indépendants, $1\leqslant p\leqslant n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^{n} A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^{n} A_i$,

5 On lance deux dés équilibrés, et on appelle X est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales de (X,Y).

6 Soient X_1,X_2 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme $\mathscr{U}(2)$ sur $\{-1,1\}$ et $X_3 = X_1\times X_2$.

Montrer que X_1,X_2,X_3 sont deux à deux indépendantes, mais ne le sont pas mutuellement.

7 Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, montrer que $Y = n-X\sim\mathscr{B}(n,q)$.

Probabilités

8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{N}$ vérifiant $\mathbb{P}(\{n,n+1,\dots\}) = \lambda a_n$.

9 Sur l'univers $\mathbb{N}^*$, muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N}^*)$, montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ unique telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$.

10 **Le problème des clés** Au lycée Leconte de Lisle, il y a beaucoup de serrures différentes, on vous a prêté un trousseau de n clefs pour ouvrir une porte, et vous avez oublié de demander laquelle était la bonne.

De plus, elles se ressemblent suffisamment pour qu'il soit impossible de deviner à vue laquelle est la plus plausible.

Vous les essayez donc l'une après l'autre.

Quelle est la probabilité pour que ce soit la k^{e} clé testée qui vous ouvre la porte ($1\leqslant k\leqslant n$) ?

11 Dans une urne se trouvent $n-1$ boules blanches, 1 boule rouge. On tire, sans remise, boule après boule. Quelle est la probabilité pour que la boule rouge sorte de l'urne au k^{e} tirage ?

12 **Poker**

Dans un jeu de 52 cartes classiques, on distribue des mains de 5 cartes. Calculer les probabilités des événements :

- QFR : « Avoir une quinte flush royale » (quinte à l'as et couleur),
- QF : « Avoir une quinte flush non royale » (quinte non royale et couleur),
- A_4 : « Avoir un carré » (les 4 cartes de même valeur),
- F : « Avoir un full » (un brelan et une paire),
- C : « Avoir une couleur qui ne soit pas une quinte » (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas),
- Q : « Avoir une quinte non flush » (5 cartes qui se suivent, pas toutes de la même couleur),
- A_3 : « Avoir un brelan » (exactement 3 cartes de même valeur),

- PP : « Avoir une double paire » (2 paires ne formant pas un carré),
- A_2 : « Avoir une paire » (exactement 2 cartes de même valeur),
- R : « Rien de tout ça ! ».

On devra trouver :

Événement	QFR	QF	A_4	F	C	Q	A_3	PP	A_2	R
Probabilité (%) $\approx$	0,00015	0,0014	0,024	0,14	0,20	0,40	2,1	4,8	42	50

13

Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de $99\ \%$ lorsqu'elle est effectivement présente.

Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0{,}1\ \%$ des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

14 Le problème de Monty Hall

Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari. Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre. Il propose ensuite au candidat de changer de porte. A-t-il intérêt à le faire ?

15 Distance la plus probable

On constitue une file d'attente en attribuant au hasard des numéros d'ordre à n personnes. Pour d compris entre 1 et $n-1$, calculer la probabilité que deux amis soient distants de d places (c'est-à-dire séparés par $d-1$ personnes.) Quelle est la distance la plus probable ?

Même question s'ils sont placés sur un cercle.

16

Une urne contient N boules de k couleurs : N_1 de couleur c_1, N_2 de couleur c_2,..., N_k de couleur c_k (on a donc $N_1+\dots+N_k=N$). On tire n boules et on cherche la probabilité p d'obtenir exactement n_i boules de couleur c_i pour chaque i (donc $n_1+\dots+n_k=n$).

Déterminer p dans le cas d'un tirage simultané, dans le cas de tirages successifs avec remise et dans le cas de tirages successifs sans remise et comparer les résultats.

17 Problème des anniversaires et des coïncidences

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n jetons avec remise. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité que deux personnes soient nées le même jour (en supposant que personne n'est né le 29 février...) ?

   Application numérique pour $n\in\{10,20,30,40,50,60,70\}$. À partir de quelle valeur de n cet événement est-il plus probable que son contraire ?

18

Deux joueurs s'affrontent au tir à l'arc, à tour de rôle, le premier qui touche la cible a gagné. Le premier joueur (qui tire le premier) a une probabilité $p_1>0$ de toucher la cible, le second une probabilité $p_2>0$. On suppose les tirs indépendants.

1. Calculer la probabilité que le premier tireur gagne puis celle que le second gagne.
2. En déduire qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Retrouver le résultat en utilisant une continuité monotone de la probabilité, en introduisant l'événement A_n : « Le jeu ne s'est pas arrêté au bout de n tirs de chaque joueur. »
4. On suppose que $p_2=\frac{3}{2}p_1$. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

19 Problème des rencontres

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a rencontre au i^e tirage si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement « il n'y a aucune rencontre » et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on note A_i l'événement « il y a rencontre au i^e tirage ».

1. Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.
2. Démontrer, en utilisant librement la formule de Poincaré (crible) que $\mathbb{P}(E)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Applications :

- *Problème des danseurs de Chicago : n couples se présentent à un concours de danse ; chaque danseur choisit une partenaire au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne danse avec son conjoint ?*
- *Un facteur possède n lettres adressées à n personnes distinctes. Il les distribue au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucune n'arrive à destination ?*
- *Les étudiants de MPI décident de se faire des cadeaux pour Noël. Ils mettent tous un papier portant leur nom dans la poubelle de la salle R005 puis tirent successivement un papier chacun portant le nom de personne à qui ils doivent faire un cadeau. Quelle est la probabilité que personne ne doivent se faire soi-même un cadeau ?*
- *Dans un club de Bridge, n messieurs laissent leurs n cannes (toutes distinctes) au vestiaire. En repartant, ils reprennent au hasard une canne. Quelle est la probabilité qu'aucun d'entre eux ne reprenne sa propre canne ?*
- *Quelle est la proportion de permutations de $\mathfrak{S}_n$ n'ayant aucun point fixe (on parle de **dérangement**) ?*

Probabilités conditionnelles

20

Un canal de transmission transmet des bits selon le modèle suivant : il transmet fidèlement un bit avec une probabilité p et de façon erronée avec probabilité $(1-p)$ où $0<p<1$.

Un bit traverse n canaux de ce type successivement, et l'on suppose que chaque canal fonctionne indépendamment des autres.

On notre x_0 le bit initial. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note x_n le bit après la traversée de n canaux, et p_n la probabilité que $x_n=x_0$.

1. Déterminer une relation entre p_{n-1} et p_n pour $n\geqslant 1$.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n et p.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_n$.

21

Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que

- $2\ \%$ des personnes contrôlées sont en été d'ébriété ;
- 95 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété ;
- 98 fois sur 100 l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété ;

1. On essaie l'appareil sur une personne et l'on constate que le résultat est positif.

   Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2. Même question si le résultat est négatif.
3. Quel est la probabilité que le résultat soit faux ?

22

Dans une urne se trouvent n boules rouges et n boules blanches.

On tire deux par deux sans remise toutes les boules de l'urne.
Quelle est la probabilité que l'on tire une boule de chaque couleur à chaque tirage ?

23 Urne de Pólya

Une urne contient initialement $r \geqslant 1$ boules rouges et $b \geqslant 1$ boules blanches.
On effectue des tirages susccessifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée dans l'urne avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.
Pour $n \geqslant 1$, on note R_n (resp. B_n) l'événement « la n^e boule tirée est rouge (resp. blanche) ».

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la seconde boule tirée est rouge ?
2. On note $p_n(r,b)$ le probabilité d'obtenir une boule rouge au n^e tirage quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. Montrer que
$$\forall n \geqslant 2, \quad p_n(r,b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c,b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r,b+c)$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de R_n est égale à $\frac{r}{r+b}$.
4. Démontrer en utilisant la même méthode que pour $1 \leqslant m < n$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.
On pourra noter $p_{m,n}(r,b)$ la probabilité d'obtenir des boules rouges aux m^e et n^e tirages, quand l'urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, et raisonner par récurrence sur m.
5. En déduire la probabilité de $R_m \cap B_n$.

24

Trois joueurs A, B, C s'affrontent à un jeu aléatoire suivant les règles suivantes :

- à chaque partie, deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité,
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties de suite.

1. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
2. A et B s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

25 Fabriquer une pièce équilibrée

On dispose d'une pièce dont on en sait pas si elle est équilibrée ou non.
Proposer un protocole permettant, en l'utilisant, de simuler une pièce équilibrée.

Indépendance

26 Oral CCINP – Loi du 0-1 de Borel

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k) \neq 1$.

Posons $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $B = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$ et $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\mathbb{P}(B)$.
2. Démontrer que les séries $\sum \ln(1-\mathbb{P}(A_n))$ et $\sum \mathbb{P}(A_n)$ sont de même nature.
3. En déduire que $\mathbb{P}(B) < 1$ si et seulement si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
4. Soit $I = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Démontrer que $\mathbb{P}(I) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(B) < 1$, et que $\mathbb{P}(I)$ ne peut valoir que 0 ou 1.

27 Loi Zeta ; grand classique de l'écrit

Soit $s \in]1,+\infty[$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de λ peut-on définir une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note A_m l'événement « n est multiple de m ». Déterminer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $(A_p)_{p\in\mathscr{P}}$ sont indépendants.
4. En déduire que $\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.
5. **Application de cette formule**
On se propose en application de prouver que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ des inverses des nombres premiers diverge. On raisonne par l'absurde en supposant que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.
Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que l'on a pour tout réel $s > 1$, $\ell \geqslant \zeta(s)$.
Conclure.

28 Temps d'attente

On lance une pièce avec la probabilité $p \in]0,1]$ de faire pile. On note A_n l'événement « On obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n^e lancer » et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

1. Déterminer a_1, a_2, a_3.
2. Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et interpréter le résultat obtenu.

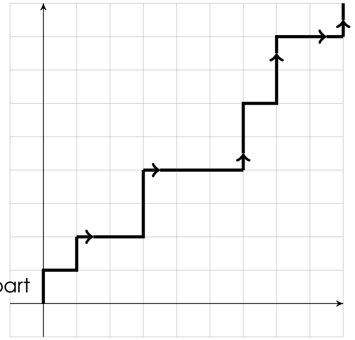
29 Marche aléatoire (écrit E3A)

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.
À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
À chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est (E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x,y) où x représente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. À chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :

- $x_0 = y_0 = 0$
- Pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$, $(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1}+1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1}+1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.

Empire State Building →



Départ

Le trajet est (N, E, N, E, E, N, N, E, E, E, N, N, E, N, N, E, E, N)

1. (a) En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$.
   (c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a,b) avec $(a,b) \neq (0,0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'évènement « Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$. » On pourra noter N_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord » et E_k l'évènement « à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est. »
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement U_1.
   (b) Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ pour $n \geqslant 2$.
   (c) Soit $n \geqslant 2$. Justifier brièvement que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$. En déduire le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

   Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

   (d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n,n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.
   (f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:
   $$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$$
   puis que
   $$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$
3. On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.
   (a) Déterminer le réel a tel que :
   $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   (b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :
   $$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N \to +\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$
   (c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :
   $$v_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Variables aléatoires

30 Soit X,Y,Z,T quatre variables aléatoires discrètes indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X,Y,Z,T suivent toutes une loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose
$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$.
   (b) Justifier que les variables aléatoires $\det(M)$ et $-\det(M)$ suivent la même loi.
   (c) Calculer $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. (a) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice orthogonale.
   (b) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice inversible.
   (c) Calculer la probabilité pour que M soit une matrice diagonalisable.

31 **Taux de panne – Oral CCINP** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(X \geqslant n) > 0.$$
On définit le taux de panne de X par la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ avec
$$x_n = \mathrm{P}(X = n \mid X \geqslant n).$$

1. Montrer que si l'on pose $\mathrm{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une loi de probabilité. Déterminer le taux de panne de Y.
2. Dans le cas général, établir
   $$\forall n \geqslant 2, \mathrm{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k)$$
3. En déduire une expression de $\mathrm{P}(X = n)$ en fonction des x_k valable pour tout $n \geqslant 1$.
4. Déterminer les variables aléatoires discrètes à taux de panne constant.

32 Loi de Pascal

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes, de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$.

1. Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
2. Montrer que pour $0<n<k$, $\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}=\binom{k-1}{n}$.

   On pourra par exemple introduire $P(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\sum_{j=n}^{k-1}\binom{j-1}{n-1}\right)x^n$.
3. Calculer par récurrence la loi de la variable aléatoire S_n.
4. On joue à Pile ou Face; on note T_n le numéro du n-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T_n (loi de Pascal). Combien vaut l'espérance de T_n ?

   La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurrence d'un événement; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi de Pascal », donne le temps d'attente de la n^e occurrence de cet événement.

33 Le problème du collectionneur

Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i $(1\leqslant i\leqslant n)$ est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images $(2\leqslant k\leqslant n)$. On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n=L_1+L_2+\ldots+L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathbb{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n\to+\infty$.
3. Calculer $\mathbb{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

34 L'espérance via une loi conditionnelle

1. On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{x\in X(\Omega),\mathbb{P}(X=x)\neq 0}\mathbb{E}(Y|X=x)\mathbb{P}(X=x)$$

   où l'on désigne par $\mathbb{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$.
2. Soit $(A_1,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements. Démontrer la **formule de l'espérance totale**

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X\mid A_k)\mathbb{P}(A_k).$$

3. Soit n et r dans $\mathbb{N}^*$. On considère n urnes $U_1,\ldots,U_n$. Dans l'urne j, il y a j boules blanches et $n-j$ boules noires. On effectue r tirages avec remise dans une urne choisie au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées au bout des r tirages.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

35 Embranchement routier

On se place à un embranchement routier. Le nombre de véhicules arrivant pendant un intervalle de temps d'une heure est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Les véhicules ne peuvent prendre que l'une des directions A ou B, et la variable aléatoire Y représente le nombre de véhicules empruntant la direction A pendant cet intervalle de temps.

Chaque véhicule prend la direction A avec la probabilité p et les choix sont faits de manière indépendante.

C'est pourquoi on suppose que si n véhicules arrivent à l'embranchement pendant une heure donnée, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Déterminer la loi de Y ainsi que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, la loi de X conditionnelle à l'événement $(Y=k)$ (du nombre de véhicules arrivés à l'embranchement sachant que k véhicules ont emprunté la direction A).

36 Théorème de Weierstrass; polynômes de Bernstein et probabilités (Écrits CCINP)

On propose dans cette partie une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[0,1]$.

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, n un entier naturel non nul et $x\in[0,1]$.

On pose : $B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$ (polynôme de Bernstein).

1. S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $\alpha>0$, $P(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}$.
   (b) Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=B_n(f)(x)$.
2. (a) Soit $\varepsilon>0$, justifier simplement qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout couple $(a,b)\in[0,1]^2$, $|a-b|\leqslant\alpha$ entraîne $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$, puis majorer $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|$, pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\alpha$.
   (b) Justifier que $\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\mathbb{P}(S_n=k)\right|\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\alpha\right)$.
   (c) Démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, $|B_n(f)(x)-f(x)|<2$ puis conclure.

37 E3A 2023 MP

Soit n un entier naturel non nul.

1. **Questions de cours** : Soit p une projection vectorielle de rang $r\in\mathbb{N}$.
   (a) Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.
   (b) Donner les spectres possibles de W.
   (c) Comparer $\mathrm{rg}(W)$ et $\mathrm{tr}(W)$.
   (d) Calculer $\det(W)$.

On considère la famille $X_1,\ldots,X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega)=\mathrm{diag}(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathrm{tr}(M)$.
   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.
   (b) Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.
3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R=\mathrm{rg}(M)$.

4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.
   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.
5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :
   « les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »
   (a) On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.
   (b) On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.
   (c) On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.
6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^{\top} = \left(a_{ij}(\omega)\right)_{[\![1,n]\!]^2}$.
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.
   (c) Montrer que $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$.
   (e) Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
   (f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$.

Fonctions génératrices

38 Fonction génératrice

Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = a(k+1)p^k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En employant la fonction génératrice de X, déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

39 Dés pipables ?

Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2,12]\!]$.

40 Temps d'attente

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1-p$ d'échouer.

On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et l'on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1. Reconnaître la loi de T_1.
2. Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^m}$$

4. Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

41 Loi binomiale ; loi de Poisson et gestion de stock (situation type Wald)

Le nombre N de clients arrivant dans un magasin pendant une journée de vente est supposé suivre une **loi de Poisson**[2] de paramètre $\lambda > 0$.

1. Dans cette question, un client achète un article A avec probabilité p (il en achète au plus un).
   Le **stock** d'articles A à l'ouverture du magasin est de $s \geqslant 1$ articles.
   On veut calculer la loi du nombre total T d'articles demandés en une journée et la probabilité qu'il n'y ait pas **rupture de stock** de l'article A durant cette journée.
   On modélise la situation de la manière suivante : en plus de la variable aléatoire N, on se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, représentant la décision d'achat du n^e client : $X_n = 1$ s'il achète, $X_n = 0$ sinon. On suppose toutes ces variables aléatoires **indépendantes**.
   Déterminer la loi de T et la probabilité qu'il n'y ait pas rupture de stock.
2. Dans cette question, les probabilités respectives pour chaque client d'acheter zéro, un ou deux articles A sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
   Le nombre d'articles achetés pendant une journée est maintenant noté S.
   On définit cette fois une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, telle que Y_n représente le nombre d'achats d'article A du n^e client.
   (a) Calculer la fonction génératrice G_S de la variable aléatoire S, en tout $t \in [-1,1]$.
   (b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(S = 3)$ et la calculer numériquement pour $\lambda = 6$.
   (c) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(S)$ et de la variance $\mathbb{V}(S)$ et donner leur valeur. Les calculer numériquement pour $\lambda = 6$.

2. Cohérent avec l'approximation des lois binomiales par des lois de Poisson vue en cours.