Exercices vus en cours

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^2z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{n^n}z^n$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}z^n$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n!z^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ où $a_n=\dfrac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3}$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}z^{2n}$
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$

Solution de 1 :

1. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$.**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!}=\dfrac{|z|}{n+1}\longrightarrow 0$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$ convergence absolument pour tout $z\in\mathbb{C}$, donc $R=+\infty$.
2. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^2z^n$.**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)^2|z|^{n+1}}{n^2|z|^n}\longrightarrow|z|$, donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^2z^n$ convergence absolument si $|z|<1$ et diverge grossièrement si $|z|>1$, donc $R=1$.
3. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{n^n}z^n$.**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{|z|^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}|z|^n\,n!}=\dfrac{|z|}{(1+1/n)^n}\longrightarrow \mathrm{e}^{-1}|z|$, donc $R=\mathrm{e}$.
4. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}z^n$.**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)^2|z|^{n+1}2^n}{n^2|z|^n2^{n+1}}\longrightarrow\dfrac{|z|}{2}$, donc $R=2$.
5. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n!z^n$.**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n}\longrightarrow+\infty$, donc $R=0$.
   Bon, pour cet exemple, pas besoin de d'Alembert, on a directement que si $z\neq 0$, $n!z^n\not\to 0$...
6. **Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ avec $a_n=\dfrac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3}$.**

   Dans cet exemple, mieux vaut passer par un équivalent : pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}||z|^{n+1}}{|a_n||z|^n}\sim|z|$, donc $R=1$.

7. **Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}z^{2n}$ (série entière lacunaire).**

   Pour $z\in\mathbb{C}^*$, $\frac{(n+1)^2|z|^{2n+2}2^n}{n^2|z|^{2n}2^{n+1}}\to\frac{|z|^2}{2}$, donc $R=\sqrt{2}$.

8. **Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n}$.**

   Pour $z=-1$, la série est semi-convergente. Donc $R=1$.
   On aurait aussi pu appliquer le critère de d'Alembert.

2 CCINP 20 – Rayons de convergence

Solution de 2 : CCINP 20 – Rayons de convergence

1. Voir cours.
2. (a) Notons R le rayon de convergence de $\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$ et posons : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$.
   Pour $z=0$, $\sum u_n(0)$ converge.
   Pour $z\neq 0$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{n+1}{4n+2}|z|^2$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=\frac{|z|^2}{4}$.
   D'après la règle de d'Alembert,
   Pour $|z|<2$, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.
   Pour $|z|>2$, la série numérique diverge grossièrement.
   On en déduit que R=2.

   (b) Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n}z^n$ et posons : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_n=n^{(-1)^n}$.
   On a, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|a_nz^n|\leqslant|nz^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum nz^n$ vaut 1.
   Donc $R\geqslant 1$. (*)
   De même, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|\frac{1}{n}z^n|\leqslant|a_nz^n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}z^n$ vaut 1.
   Donc $R\leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $R=1$.

   (c) Notons R le rayon de convergence de $\sum\cos n z^n$et posons : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_n=\cos n$.
   On a, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, z\in\mathbb{C}$, $|a_nz^n|\leqslant|z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ vaut 1.
   Donc $R\geqslant 1$. (*)

   Pour $z=1$, la série $\sum\cos n z^n=\sum\cos n$ diverge grossièrement car $\cos n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
   Donc $R\leqslant 1$. (**)
   D'après (*) et (**), $R=1$.

3 CCINP 21 – Rayon de convergence

Solution de 3 : CCINP 21 – Rayon de convergence

1.
2. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, $R \leqslant 1$.
   Puisque $(a_n 1^n)$ est bornée, $R \leqslant 1$.
   Donc $R = 1$.
3. $\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite équivalente à $(\sqrt{n})^{(-1)^n-1}$ donc bornée en séparant n pair ou impair et $\sum\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge grossièrement donc $R = 1$.

4 Oral Mines

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

Solution de 4 : Oral Mines

Comme (a_n) est bornée $R \geqslant 1$.
Mais $a_n \not\to 0$ (car $\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$), donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

5 Oral X

Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Solution de 5 : Oral X

Si $|z| < R'$, $|a_n|^2 |z|^n \to 0$ donc $|a_n| \sqrt{|z|}^n \to 0$ donc $\sqrt{|z|} \leqslant R$ et $|z| \leqslant R^2$ donc $R' \leqslant R^2$.
Puis si $|z| < R$, $a_n z^n \to 0$ donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$ donc $|z|^2 < R'$ donc $R' \geqslant R^2$.
Finalement, $R' = R^2$.

6

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$. Montrer que $R = \min(R', R'')$.

Solution de 6 :

En séparant les termes d'indice pair ou impair, on trouve $R \geqslant \min(R', R'')$.
Si $|z| > R'$, il y a divergence grossière de $\sum a_{2n} z^{2n}$, donc $a_{2n} \not\to 0$ donc $a_n \not\to 0$ donc $|z| \geqslant R$ et $R' \geqslant R$. De même, $R'' \geqslant R$.
Autre argument possible : en remarquant qu'en posant b_n tel que $b_n = a_n$ si n pair et 0 sinon, on a $|b_n| \leqslant |a_n|$, on obtient $R' \geqslant R$ et de même on montrer que $R'' \geqslant R$.
Finalement, $R = \min(R', R'')$.

7 CCINP 15 – Convergence normale et série entière

Solution de 7 : CCINP 15 – Convergence normale et série entière

1. Voir cours.
2. Voir cours.

3. On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n^2}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

   On en déduit que série entière $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
   En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R.

8 CCINP 18 – Modes de convergence et continuité

Solution de 8 : CCINP 18 – Modes de convergence et continuité

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D =]-1, 1]$.

2. (a) $\forall x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

   $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x \in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

   Donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D.

   $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1, 1[$. $(*)$

   Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0, 1]$.
   $\forall x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.

   On a, $\forall x \in [0, 1]$, $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

   Et, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.
   Donc, $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
   Les fonctions u_n étant continues sur $[0, 1]$, la somme S est alors continue sur $[0, 1]$.
   Donc, en particulier, S est continue en 1. $(**)$

   Donc, d'après $(*)$ et $(**)$, S est continue sur D.

9 CCINP 47 – Rayon de convergence et somme

Solution de 9 : CCINP 47 – Rayon de convergence et somme

1. On note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x)=\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.
   Pour x non nul, $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\left|\dfrac{3n x^2}{n+1}\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\left|3x^2\right|$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert :
   si $\left|3x^2\right|<1$ c'est-à-dire si $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument
   et si $\left|3x^2\right|>1$ c'est-à-dire si $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.
   On en déduit que $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   On pose : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[,\ S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n x^{2n}}{n}$.
   On a : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[,\ S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(3x^2)^n}{n}$.
   Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall\, t\in]-1,1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n}=-\ln(1-t)$.
   Ainsi : $\forall\, x\in\left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[,\ S(x)=-\ln(1-3x^2)$.

2. Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
   On considère les séries $\sum a_{2n}x^{2n}=\sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum 5^{n+1}x^{2n+1}$.

   Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1}x^{2n+1}$.
   Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.
   Or, $\sum 4^n x^{2n}=\sum (4x^2)^n$.
   Donc pour $|4x^2|<1$ c'est-à-dire $|x|<\dfrac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument
   et pour $|4x^2|>1$ c'est-à-dire $|x|>\dfrac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.
   On en déduit que $R_1=\dfrac{1}{2}$.
   Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1}x^{2n+1}=5x\sum(5x^2)^n$, on trouve $R_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   $\sum a_n x^n$ étant la série somme des séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$, on en déduit, comme $R_1\neq R_2$, que $R=\min(R_1,R_2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   D'après ce qui précéde, on en déduit également que :
   $$\forall\, x\in\left]-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right[,\ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(4x^2)^n+5x\sum_{n=0}^{+\infty}(5x^2)^n=\frac{1}{1-4x^2}+\frac{5x}{1-5x^2}.$$

10 CCINP 23 – Série dérivée et classe $\mathscr{C}^1$

Solution de 10 : CCINP 23 – Série dérivée et classe $\mathscr{C}^1$

1. Pour $x \neq 0$, posons $u_n(x) = a_n x^n$ et $v_n(x) = (n+1)a_{n+1}x^n$.
On pose $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
On a, alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \ell|x|$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \ell|x|$.

On en déduit que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ vaut $R = 1/\ell$ (avec $R = +\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$).

2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in]-R, R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
Soit $r \in [0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.
i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r .
iii) D'après 1., $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
Donc, d'après le cours, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $]-R, R[$, donc converge uniformément sur D_r.
On en déduit que $\forall\, r \in [0, R[$, $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r.

Donc, S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.

11 CCINP 19 – Dérivée réelle et produit de Cauchy complexe

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.
Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
(b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :
$x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.
(b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
(c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :
$z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Solution de 11 : CCINP 19 – Dérivée réelle et produit de Cauchy complexe

1. (a) On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions : les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, la série de fonction converge simplement sur $]-R, R[$ et la série des f_n' qui a même rayon de convergence converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$.
(b) Et donc, en dérivant $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\boxed{\forall\, x \in]-1, 1[,\ \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.}$

2. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\boxed{\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.}$

   (b) Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de rayon R_a et R_b respectivement, alors la série des $\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ est de rayon de $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout z tel que $|z| < R_c$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

   (c) En effectuant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.}$$

12

1. Déterminer le rayon de convergence R, puis calculer sur $]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
2. Si $n \geqslant 1$, on pose $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Déterminer le rayon de convergence r de $\sum_{n \geqslant 1} h_n x^n$ et calculer pour $x \in]-r, r[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n$

Solution de 12 :

- **Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :**

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

  On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

  Et ainsi de suite...

- **On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :**

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

- **Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles. Par exemple, définissons, si $n \geqslant 1$,**

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Alors le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} h_n x^n$ est $r = 1$ et on calcule

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Remarquons que, pour tout n, $h_n \geqslant 1$. Donc $r \leqslant 1$ (la série $\sum h_n 1^n$ diverge grossièrement, donc 1 n'est pas dans le disque ouvert de convergence). Mais aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$h_n \leqslant n \times 1 = n$$

(majoration d'une somme par le nombre de termes multiplié par le plus grand d'entre eux). Donc $r \geqslant 1$ (en effet, si $|x| < 1$, $h_n x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $|x| \leqslant r$).
Notons que l'équivalent célèbre $h_n \sim \ln n$ n'est pas nécessaire ici : très souvent, la détermination d'un rayon de convergence est assez grossière.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. On définit aussi $b_0 = 0$. On a construit ces deux suites pour avoir, en posant $h_0 = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$$

On peut alors appliquer le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

d'où

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

13 Une condition suffisante de continuité sur le disque fermé

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, montrer que $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R, R]$.

Solution de 13 : Une condition suffisante de continuité sur le disque fermé

Il y a convergence normale sur $[-R, R]$.

14 Une fonction non DSE dont la série de Taylor a un rayon de convergence infini

1. Montrer que f, prolongement par continuité de $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ en 0, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de Taylor de f a un rayon de convergence infini.

3. Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entière.

Solution de 14 : Une fonction non DSE dont la série de Taylor a un rayon de convergence infini

Notons en effet f cette fonction. On a vu que f était de classe C^∞, et que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0)=0$$

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ $(r>0)$, alors elle est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire

$$\forall x\in]-r,r[\qquad f(x)=0$$

ce qui est manifestement faux. Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

15 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

16 En utilisant le développement en série entière de $x\mapsto\ln(1-x)$, déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Solution de 16 :

Il suffit d'utiliser le théorème d'Abel radial appliqué à $f(-x)=\ln(1+x)$.

On peut aussi conclure avec le TSSA qui nous assure la convergence uniforme sur $[-1,0]$ et donc la continuité en -1.

17 **DSE de Arcsin et Arccos :** Justifier que Arcsin est développable en série entière et donner son développement et son rayon de convergence.

Même question pour Arccos.

18 **CCINP 51 – Un calcul de somme de série et DSE de Arcsin**

Solution de 18 : CCINP 51 – Un calcul de somme de série et DSE de Arcsin

1. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

   On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

   $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4(2n+3)}=\dfrac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4}$.

   Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{4}<1$.

   Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. D'après le cours, $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ u\mapsto(1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha\notin\mathbb{N}$.

   De plus, $\forall\, u\in]-1,1[$, $(1+u)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n$.

   En particulier, pour $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ et $u=-t$:

$R=1$ et $\forall t\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots.2n=2^n n!$, on obtient :

$\forall t\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$

Conclusion : $R=1$ et $\forall t\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$.

3. D'après la question précédente, en remarquant que : $x\in]-1,1[\Leftrightarrow t=x^2\in[0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :

   $\forall x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

   Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\mathrm{Arcsin}':x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

   De plus, on obtient :

   $\forall x\in]-1,1[$, $\mathrm{Arcsin}\,x=\underbrace{\mathrm{Arcsin}\,0}_{=0}+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

4. Prenons $x=\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$ dans le développement précédent.

   On en déduit que $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

   C'est-à-dire, en remarquant que $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}=\dfrac{\pi}{3}$.

19 CCINP 2 – DES; DSE et DL

Solution de 19 : CCINP 2 – DES; DSE et DL

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve :

$$f(x)=\frac{3}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}.$$

2. D'après le cours, $x\longmapsto\dfrac{1}{x+1}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

   De plus, on a $\forall\,x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

   Et, $\forall\,x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1+x)^2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent).

   On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière.

   Et $\forall\,x\in]-1,1[$, $f(x)=3\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

C'est-à-dire : $\forall\, x \in]-1,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$.

Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f.

D'après ce qui précède, $]-1,1[\, \subset D$.

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum(4n+7)(-1)^n x^n$.

D'après ce qui précède $R \geqslant 1$.

Posons, pour tout entier naturel n, $a_n = (4n+7)(-1)^n$.

Pour $x = 1$ et $x = -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = +\infty$ donc $\sum(4n+7)(-1)^n x^n$ diverge grossièrement.

Donc $R \leqslant 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

On en déduit que $D =]-1,1[$.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

   De plus, $\forall\, x \in]-R,R[$,

   $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

   $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$.

   et, par récurrence, on a :

   $\forall\, p \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]-R,R[,\ g^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)...(n+p)a_{n+p}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n$.

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p!a_p$.

   C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}$.

   (b) f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{3}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. $(*)$

   Or, d'après 3.(a), pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ est aussi la valeur du p^{e} coefficient du développement en série entière de f.

   Donc, d'après 2., pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = (4p+7)(-1)^p$. $(**)$

   Ainsi, d'après $(*)$ et $(**)$, au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{3}(4p+7)(-1)^p x^p + o(x^3)$.

   C'est-à-dire, au voisinage de 0, $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

20 CCINP 22 – Rayon de convergence d'une somme

Solution de 20 : CCINP 22 – Rayon de convergence d'une somme

1. Voir cours.

2. Pour $|x|<1$, $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

   Pour $|x|<\frac{1}{2}$, $\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n$.

   D'après 1., le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.

   Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

   Et, pour $|x|<\frac{1}{2}$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$.

   Pour $x=\frac{1}{4}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge car $\left|\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$.

   Pour $x=\frac{1}{2}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\frac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).

   Pour $x=-\frac{1}{2}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

   En effet, d'une part, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

   D'autre part, $\sum_{n\geqslant 1}-\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

21 CCINP 32 – Solution DSE d'une EDL

Solution de 21 : CCINP 32 – Solution DSE d'une EDL

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S.

   Pour tout $x\in\,]-R,R[$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$.

   Donc $x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\right)x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $(n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0$.
   C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $na_{n+1}=(n+1)a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=na_1$.
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les

fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1,1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est un plan vectoriel.
D'où l'absurdité.

22 CCINP 24 – Calcul d'une série entière et classe C^∞ d'une fonction

Solution de 22 : CCINP 24 – Calcul d'une série entière et classe C^∞ d'une fonction

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$.
$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0$.
On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc $R = +\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x \geqslant 0$, on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t) = \mathrm{ch}\sqrt{x}$.
Pour $x < 0$, on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t) = \cos\sqrt{-x}$.
(b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
Cela prouve que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

23 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n} x^n$.

Solution de 23 :

Par d'Alembert, $R = 2$ (ou parce que le rayon de convergence de $\sum n^2 x^n$ vaut 1).

Puis $n^2 = n(n-1) + n$ donc $f(2x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Donc pour tout $x \in]-2,2[$, $f(x) = \dfrac{2x^2+4x}{(2-x)^3}$.

24 Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{n}{(n-1)(n+2)} x^n$.

Solution de 24 :

Par d'Alembert, $R=1$ (ou parce que le rayon de convergence de $\dfrac{n}{(n-1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n}$).

Puis décomposition en éléments simples.

25 **Une application des séries génératrices** Pour tous les entiers k et n tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k points fixes. On pose $D_{0,0}=1$ et $d_n = D_{n,0}$ désigne le nombre de dérangements, c'est-à-dire de permutations sans point fixe.

1. Dresser la liste de toutes les permutations de $\mathfrak{S}_3$ et en déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ puis que $D_{n,k} = \dbinom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{d_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
4. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\mathrm{e}^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$.
5. En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
6. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?

Solution de 25 : Une application des séries génératrices

1. Il existe exactement $3! = 6$ bijections différentes de $\{1,2,3\}$ dans lui-même :
   - l'identité ;
   - les 3 transpositions $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $(2\ 3)$.
   - les 2 cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 3\ 2)$.

   L'identité a 3 points fixes, les transpositions en ont 1 et les cycles n'en ont pas.
   On en déduit que
   $$\boxed{D_{3,0}=2,\ D_{3,1}=3,\ D_{3,2}=0 \text{ et } D_{3,3}=1.}$$
2. Si on note A_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ ayant k point fixes, alors les ensembles $A_0,\dots,A_n$ forment un recouvrement disjoint de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, on a bien $\boxed{n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |A_k| = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k}.}$

   Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a
   - $\dbinom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;

- ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n-k$ éléments restants. Il y a d_{n-k} telles permutations.

Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\boxed{D_{n,k}=\binom{n}{k}d_{n-k}.}$

3. On a $0\leqslant d_n\leqslant n!$, soit $\dfrac{|d_n|}{n!}\leqslant 1$. Donc $\boxed{R\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{d_n}{n!}z^n\right)\geqslant R\left(\sum_{n\geqslant 0}z^n\right)=1.}$

4. Puisque les séries entières définissant $\exp x$ et $f(x)$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, leur produit de Cauchy est absolument convergent pour $|x|<1$. De plus, on a
$$\mathrm{e}^x f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n x^n \text{ avec } b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}\times\frac{1}{k!}.$$
Mais
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}D_{n,k}=1.$$
On obtient
$$\boxed{\mathrm{e}^x f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.}$$

5. De l'égalité $\mathrm{e}^x f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, on tire
$$f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$
On réalise le produit de Cauchy des deux séries entières obtenues à droite et on trouve
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n x^n \text{ avec } c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$
Par unicité des cœfficients d'une série entière, on obtient bien $\boxed{d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.}$

6. La probabilité recherchée est $p_n=d_n/n!=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Utilisant le développement en série entière de e^{-x}, on trouve que $\boxed{\text{cette probabilité converge vers } \mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}.}$

Autres exercices

26 Déterminer les rayons de convergence des séries entières

1. $\sum (\sin n) z^n$
2. $\sum 3^{-n}(1+2/n)^n z^{4n}$
3. $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) z^n$
4. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} z^n$
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$
6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1} z^n$
7. $\sum_{n\geqslant 1} \binom{2n}{n} z^n$
8. $\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} z^n$
9. $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$
10. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n z^n$
11. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$
12. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right) z^n$

Solution de 26 :

1. La suite $(\sin n)$ est bornée, le rayon de convergence de $\sum(\sin n)z^n$ est donc $\geqslant 1$. Mais elle ne converge pas vers 0, le rayon de convergence est donc $\leqslant 1$. Pour montrer que la suite $(\sin n)$ ne converge pas vers 0, on peut par exemple utiliser la formule de développement de $\sin(n+1)$, comme $\sin 1 \neq 0$ on obtient que $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, ce qui contredit $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.
2. si $z \neq 0$,
$$3^{-n}(1+2/n)^n x^{4n} \sim \mathrm{e}^2\left(\frac{x^4}{3}\right)^n$$
qui donne un rayon de convergence égal à $3^{1/4}$.
3. La suite (a_n) converge vers 0. Donc le rayon de convergence est $\geqslant 1$. Réécrivons (technique ordinaire : on met en facteur le terme prépondérant en haut et en bas) :
$$a_n = \ln\left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
Donc $a_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ce qui ne permet pas de conclure à la convergence ni à la divergence de $\sum a_n$, mais en tout cas $\sum a_n$ ne converge pas absolument, donc le rayon est $\leqslant 1$.
4. $R=1$ (même rayon que 1.)
5. $R=1/\mathrm{e}$ (même rayon que $\sum(\operatorname{ch} n)z^n$ et équivalent)
6. $R=1$ (équivalent, d'Alembert)
7. $R=1/4$ (d'Alembert)
8. $R=1$ (d'Alembert)
9. $R=1$ (équivalent)
10. $R=+\infty$ (d'Alembert)
11. $R=1$ (suite bornée ne tendant pas vers 0)
12. $R=1$ (équivalent)

27

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n$ en la variable réelle x.
2. La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
3. Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R,0]$.
4. Etudier la limite en R (à gauche) de $(R-x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

Solution de 27 :

1. Le rayon est, d'après le cours, le même que celui de $\sum\frac{1}{n}x^n$, (car $\ln(1+1/n)\sim 1$), donc vaut 1.
2. Pour 1, ça diverge (Riemann, comparaison à la série harmonique), pour -1 ça converge (séries alternées).
3. La convergence uniforme sur $[-1,0]$ est donnée par la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées.
4. Si $x\in[0,1[$, les séries écrites ci-après convergent toutes, on n'a donc pas besoin de passer aux sommes partielles :

$$\begin{aligned}(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^{n}\\ &= (\ln 2)x+\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n\end{aligned}$$

(On a fait ici une transformation d'Abel). Notons $b_n=\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})$. La série $\sum|b_n|$ converge (série télescopique), donc $\sum_{n\geqslant 2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$. Ce qui montre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n\xrightarrow[x\to 1]{}\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)=-\ln 2$$

On obtient donc que $(1-x)S(x)\xrightarrow[x\to 1]{}0$ ce qui n'est pas très surprenant : on pourrait avoir l'intuition que S a « le même comportement » au voisinage de 1 que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$, c'est-à-dire $-\ln(1-x)$, ce qui est démontrable mais en utilisant les ε.

28 Développer en série entière la fonction $t\longmapsto\int_0^t\sin(u^2)\,\mathrm{d}u$.

Solution de 28 :

Opérations sur les séries entières :

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \sin(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(2n+1)! \times (4n+3)}$$

L'interversion étant justifiée par la convergence uniforme sur le segment $[0, t]$ (rayon de convergence $+\infty$).

29 **Oral CCINP** Montrer, pour tout $t \in [-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

Solution de 29 : Oral CCINP

Sur $]-1, 1[$, c'est du cours, qu'on retrouve éventuellement par primitivation du DSE de $\dfrac{1}{1-x}$.

En -1, il suffit d'appliquer le théorème d'Abel radial. On retrouve le résultat en montrant la convergence uniforme de $\sum (t \mapsto \dfrac{t^n}{n})$ sur $]-1, 0]$ ou sur $[-1, 0]$ au choix. Dans le premier cas, on appliquera alors le théorème de la double limite, dans le deuxième la transmission de la continuité. La convergence uniforme se montre en utilisant la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées.

30 Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0, 1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan}\, x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 \qquad\qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

Solution de 30 :

Par théorème spécial sur les séries alternées, $\sum (-1)^n a_n\ (1)^n$ converge. Donc le rayon de convergence est $\geqslant 1$. De plus, la série $\sum (-1)^n a_n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial pour tout $x \in [0, 1]$. Ce qui permet d'appliquer le thèorème d'Abel radial.

On peut aussi, d'une part de définir, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k$$

et d'autre part d'écrire, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|R_n(x)| \leqslant a_{n+1} x^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

Ce qui montre la convergence uniforme vers $\tilde{0}$ de la suite de fonctions (R_n), c'est-à-dire la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \big(x \mapsto (-1)^n a_n x^n\big)$. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n a_n x^n$ étant continues, la transmission de la continuité par convergence uniforme conclut.

L'application de ce résultat à la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $a_n = 1/n$ (on commence à $n=1$, ça ne change rien) permet de prolonger en 1 l'identité connue

$$\forall x \in [0,1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

d'où la somme de la série harmonique alternée. Pour l'autre série, on dit que, de même, l'identité

$$\forall x \in [0,1[\qquad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

se prolonge par continuité en 1 (si on tient à se ramener scrupuleusement aux hypothèses précédentes, on peut tout diviser par x, poser $y = \sqrt{x}$, etc...mais il est plus naturel de remarquer que le raisonnement utilisant le théorème spécial marche aussi bien dans ce cas particulier.

31 **Oral TPE** Ecrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ sous forme d'une somme de série.

Solution de 31 : Oral TPE

Les intégrations par parties font tourner en rond...Il faut d'abord montrer l'existence...Du côté de 0, par exemple :

$$\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| \sim_{x\to 0} |\ln x| = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$$

qui montre l'intégrabilité sur $]0,1/2]$. Puis du côté de 1, la fonction est prolongeable par continuité, car

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim z_{x\to 1}\, x-1$$

Ensuite, on peut écrire, si $x \in [0,1[$,

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ \ln x$$

On note $\phi_n \ : \ x \mapsto x^n \ \ln x$ et, par parties :

$$N_1(\phi_n) = -\int_0^1 x^n \ln x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \ \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le théorème d'interversion s'applique alors, et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

32 Ecrire comme somme d'une série simple l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ après avoir prouvé son existence.

Solution de 32 :

En 1, prolongement par continuité. En 0, $-\ln t$ est un équivalent, d'où l'intégrabilité en disant par exemple que c'est négligeable devant $1/x^{1/2}$. Puis on utilise le DSE de $\ln(1-x)$ et une interversion série-intégrale avec le théorème habituel.

33 Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$, si $x>0$?.

Solution de 33 :

Avec, par exemple, la règle de d'Alembert, on trouve que la série converge toujours. Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. Soit maintenant $x>0$; on a, pour tout $t\geqslant 0$,

$$e^{-xt}f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xt}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

Définissons donc, sur $[0,+\infty[$, ϕ_n $(n\in\mathbb{N})$ par

$$\phi_n(t)=e^{-xt}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

comme $|\phi_n(t)|=\underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ϕ_n est continue intégrable (comparaison à l'exemple de Riemann) sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$. $\displaystyle\sum_n \phi_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$, sa somme est continue (on la connaît). On calcule par intégrations par parties successives :

$$N_1(\phi_n)=\frac{1}{n!x^{n+1}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (encore d'Alembert par exemple. Mais on peut dire que c'est une série exponentielle). On conclut que $t\mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, et que son intégrale est

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\phi_n(t)\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}e^{-1/x}$$

34 Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+2}{n!}z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n(n+2)}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n)!}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left((3+2(-1)^n\right)^n x^n$
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(\sin n)z^n$

Pour l'un d'eux, on pourra utiliser le complexe j...

Solution de 34 :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^3 z^n$: Rayon de convergence : 1. Le plus rapide est de décomposer

$$X^3=\alpha X(X-1)(X-2)+\beta X(X-1)+\gamma X+\delta$$

(prenant les valeurs en 0, 1, 2, on obtient $\delta=0$, puis $\gamma=1$, puis $\beta=3$, enfin $\alpha=1$ en égalant les coefficients dominants. Donc

$$n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$$

Or on connaît $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$ (si $|z|<1$), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}=\frac{1}{(1-z)^2}$ (dérivation si la variable réelle, produit de Cauchy si la variable est complexe), $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2}=\frac{2}{(1-z)^3}$ etc...

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3+2}{n!}z^n$: On écrit $n^3=n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n$ comme plus haut, pour avoir des simplifications avec la factorielle du dénominateur.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n(n+2)}$: On décompose en éléments simples ou on dérive (il vaut mieux supposer la variable réelle).
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(2n)!}$: Si $x>0$, on trouve ch($\sqrt{x}$). Si $x<0$, on trouve cos($\sqrt{-x}$).
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left((3+2(-1)^n\right)^n x^n$: On sépare les termes pairs et les termes impairs.
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n}x^n$: On sépare les termes pairs et les termes impairs.
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(3n)!}$ (*Mines*) : Le rayon de convergence est infini (critère de D'Alembert si on tient à parler de séries, croissances comparées si on parle de suites bornées). De même que la considération des dse de $\exp(z)$ et $\exp(-z)$ permet de calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{3n}}{(2n)!}$, on peut avoir l'idée d'écrire les dse de $\exp(z)$, $\exp(jz)$ et $\exp(j^2z)$. Chacun de ces dse peut se scinder en 3 paquets suivant la congruence modulo 3 de l'indice (les paquets convergent sans problème). En ajoutant, on trouve le résultat, $\dfrac{1}{3}\left(e^z+e^{jz}+e^{j^2z}\right)$.
8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$ (*Mines*) : Rayon de convergence infini encore...mais là, pas par D'Alembert. Les croissances comparées et les suites bornées marchent bien. La notation x incite à penser que la variable est réelle, on fait donc apparaître la somme comme partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\theta}$ qui est l'exponentielle de $xe^{i\theta}$. On trouve donc

$$e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$$

Si jamais x était complexe non réel, on devrait commencer par écrire

$$\sin(n\theta)=\frac{1}{2i}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)$$

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$ (*Mines*) : Commençons par remarquer que le rayon de convergence est $\geqslant 1$. Visiblement, pour θ multiple de π, il est infini. Supposons ici aussi x réel. On passe alors par la dérivation : par théorème de dérivation des séries entières, sur $]-1,1[$ la somme a pour dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(n\theta)$$

On est donc ramené à calculer la partie imaginaire de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta}$$

Or cette série est géométrique...

10. $\sum_{n\geqslant 0} (\sin n) z^n$: C'est la partie imaginaire d'une série géométrique si $z \in \mathbb{R}$, sinon passer par une formule d'Euler.

35 Première question d'un problème des Mines !

Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Solution de 35 : Première question d'un problème des Mines !

On écrit

$$\exp(\exp x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p x^p}{n!\ p!} \right)$$

Cette écriture permet, en remplaçant x par $|x|$, d'obtenir la sommabilité de la famille $\left(\frac{n^p |x|^p}{n!\ p!} \right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, donc de pouvoir intervertir, ce qui conclut.

36

Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

1. $x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$
2. $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$
3. $x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ (une petite astuce permet d'obtenir des calculs simples)
4. $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}^2 x$ en utilisant une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.
5. $x \longmapsto \sin^2 x$ sans, quasiment, faire de calculs.

37 Une application des séries génératrices

En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonnaci donnée par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.

Solution de 37 : Une application des séries génératrices

Soit la série entière $\sum F_n x^n$. Sous réserve d'un rayon de convergence $R > 0$, on a pour $x \in]-R, R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} F_{n+1} x^{n+2}$ donc $f(x) - x = x^2 f(x) + x f(x)$ soit $(x^2 + x - 1) f(x) = -x$ et $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ lorsque $1 - x - x^2 \neq 0$.

Par DES, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{1-\varphi x} - \dfrac{1}{1-\psi x} \right)$ avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et on a bien un rayon de convergence > 0, puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \psi^n \right) x^n$: on retrouve par unicité l'expression des termes de la suite de Fibonacci.

38 Écrits CCINP 2024

Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) : $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ sur $]0,+\infty[$ développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x\in I$, $f(x)=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$.

39 L'anneau intègre des séries entières de $R\geqslant 1$

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites de cœfficients complexes de séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

L'addition et le produit de Cauchy de deux séries entières munissent $\mathscr{A}$ d'une structure d'anneau commutatif.

Montrer que $\mathscr{A}$ est intègre.

Solution de 39 : L'anneau intègre des séries entières de $R\geqslant 1$

Soit $f(z)=\sum_n a_n z^n$ et $g(z)=\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1, non identiquement nulles. Soit a_p le premier coefficient non-nul de f et soit b_q le premier coefficient non-nul de g. Alors fg est la série entière $\sum_n c_n z^n$, où c_n est donné par

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Maintenant, étudions le coefficient c_{p+q}. On a

$$c_{p+q}=\sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k}+a_p b_q+\sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k}.$$

Mais la première somme est nulle, puisque $a_k=0$ pour $k\leqslant p-1$, et la dernière somme est nulle puisque $b_{p+q-k}=0$ pour $k\geqslant p+1$. Ainsi, $c_{p+q}=a_p b_q\neq 0$ et fg n'est pas la série entière identiquement nulle. L'anneau étudié est bien intègre.

40 Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non développable en série entière

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(1-\mathrm{i}tx)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
   On pourra reconnaître la fonction Γ et utiliser nos connaissances (bien que HP) dessus.
3. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.
   La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

Solution de 40 : Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ non développable en série entière

1. Calculons, pour $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$, le module de $e^{-t(1-itx)}$. On a
$$|e^{-t(1-itx)}| = e^{-t}|e^{it^2x}| = e^{-t}.$$
Or, la fonction e^{-t} est intégrable sur $[0,+\infty[$ (par exemple, car on peut calculer effectivement $\int_0^X e^{-t}dt$ et déterminer sa limite lorsque X tend vers $+\infty$, ou alors parce que $t^2e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$). Il en est de même de la fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$, et donc f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. On va appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral. La fonction $(t,x) \mapsto t^p e^{-t(1-itx)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, en remarquant que $g(t,x) = e^{-t}e^{it^2x}$, il est facile de voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t,x) = (it^2)^k e^{-t}e^{it^2x} = i^k t^{2k} e^{-t} e^{it^2x}.$$
On remarque alors que, pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant t^{2k}e^{-t}.$$
La fonction de droite ne dépend plus de x et est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (it^2)^p e^{-t} e^{it^2x}dt.$$
3. En particulier, on a
$$|f^{(p)}(0)| = \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}dt = \Gamma(2p+1) = (2p)!.$$
Mais,
$$\frac{|f^{(p+1)}(0)|}{|f^{(p)}(0)|} = (2p+2)(2p+1) \xrightarrow{p\to+\infty} +\infty.$$
La série entière $\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ a pour rayon de convergence 0. Ainsi, la fonction f ne peut pas être développable en série entière en 0. Sinon, il existerait un intervalle ouvert I centré en 0 tel que, pour tout $x \in I$, on aurait
$$f(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p,$$
et le rayon de convergence de cette dernière série entière serait strictement positif.

41 Transformation d'Abel et théorème d'Abel - voir aussi CCP 2005

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (on suppose que R est un réel strictement positif). Soit z_0 un nombre complexe de module R, tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. On veut démontrer qu'alors la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0,z_0]$. (Théorème d'Abel)

1. On se place dans le cas où $z_0 = R = 1$. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Soit x un élément du segment $[0,1]$. Pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul p, démontrer que $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} - \rho_{n+p} x^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \rho_k x^k (x-1)$ (remarquer que $a_k = \rho_{k-1} - \rho_k$).

En déduire que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k (x-1)$

En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur le segment $[0,1]$.

2. Démontrer que le cas général peut se ramener au cas précédent.
3. Soit θ un élément de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle (cela se démontre à l'aide d'une transformation d'Abel) que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge. On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} z^n$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1. On note ϕ sa somme. Démontrer que, pour tout réel $t \in [0,1[$,

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - 2t\cos\theta + t^2\right)$$

(on pourra d'abord calculer $\phi'(t)$).

En déduire, en utilisant le résultat du 1., que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$

Calculer, de manière analogue, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$.