

## Exercices vus en cours

## 1 Transformée de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  intégrable. Montrer que la fonction  $\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 2 Transformée de Laplace

Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{K}$  intégrable.

1. Montrer que la fonction  $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
2. On suppose que  $f$  a des limites (finies) en 0 et en  $+\infty$ .  
Montrer que  $x\mathcal{L}(f)(x)$  a des limites en 0 et en  $+\infty$ , les calculer.
3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) Montrer que l'intégrale généralisée  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

(b) On définit, si  $x \geq 0$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ . Calculer la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

(c) Montrer que  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$ , autrement dit que  $F$  est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction  $g : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ .

(d) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_*^+$  et calculer  $F'$ .

(e) En déduire  $I$ .

3 CCINP 50 On considère la fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$ .

1. Prouver que  $F$  est définie et continue sur  $]0; +\infty[$ .
2. Prouver que  $x \mapsto xF(x)$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de  $+\infty$ , de  $F(x)$ .

## Solution de 3 : CCINP 50

1. Notons  $f : \begin{cases} ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$

**H1**  $\forall t \in ]0; +\infty[$ ,  $x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-2t}}{x+t}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

**H2**  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

**H3** Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0; +\infty[$ .  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\forall t \in ]0; +\infty[$ ,

$$|f(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-2t} = \varphi(t)$$

avec  $\varphi$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $]0; +\infty[$  car  $2 > 0$ .

On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt \text{ est définie et continue sur } ]0; +\infty[.$$

$$2. \forall x \in ]0; +\infty[, xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-2t} dt.$$

$$\text{Posons } \forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) = \frac{x}{x+t} e^{-2t}.$$

$$\mathbf{H1} \quad \forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-2t} = h(t).$$

**H2** Toutes les fonctions  $h_x$  et la fonction  $h$  sont continues par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .

**H3**  $\forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t} = h(t)$  et  $h$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à  $(h_x)_{x \in ]0; +\infty[}$ ,

$$\int_0^{+\infty} h_x(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{x F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}}.$$

$$3. \text{ Et donc } \boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}.$$

Autre méthode : le CV  $u = x + t$  donne  $F(x) = e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du$  ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de  $u \mapsto \frac{e^{-2u}}{u}$  valant  $u \mapsto -\frac{2u+1}{u^2} e^{-2u}$ , on « remarque » que

$$\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u},$$

donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u} du = e^{2x} \left[ -\frac{e^{-2u}}{2u} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ou alors on effectue une IPP et on utilise un théorème d'intégration de 0 dans le cas de convergence.

D'où en particulier  $x F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

#### 4 CCINP 30

- Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
- Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (a) Trouver une équation différentielle linéaire  $(E)$  d'ordre 1 dont  $f$  est solution.  
(b) Résoudre  $(E)$ .

#### Solution de 4 : CCINP 30

1. Voir cours.

2. On pose  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longrightarrow e^{-t^2} \cos(xt) \end{cases}$ .

**H1**  $\forall t \in [0, +\infty], x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  par opérations et

$$\frac{\partial u}{\partial x} : (x, t) \mapsto -te^{-t^2} \sin(xt)$$

**H2**  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto g(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$  par croissances comparées donc,  $t \mapsto u(x, t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en  $+\infty$ .

**H3**  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

**H4**  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty], \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \phi(t)$  avec  $\phi$  continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

En effet, par croissances comparées,  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ . Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en  $+\infty$ ,  $\phi$  est bien intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Donc, par théorème de classe  $\mathcal{C}^1$  des intégrales à paramètres,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

3. (a) On a,  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$ . Procédons à une intégration par parties. Soit  $A \geq 0$ .

$$\int_0^A -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

En passant à la limite quand  $A \rightarrow +\infty$ , on obtient  $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$ .

Donc  $f$  est solution de l'équation différentielle  $(E) : y' + \frac{x}{2} y = 0$ .

(b) Les solutions de  $(E)$  sont les fonctions  $x \mapsto Ae^{-\frac{x^2}{4}}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**5 La fonction  $\Gamma$**  On définit  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $\Gamma$ .
- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Que vaut  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ?
- Montrer que  $\Gamma$  est continue sur son ensemble de définition.
- Montrer que  $\Gamma$  est même de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
- Montrer que  $\Gamma$  est une fonction convexe.
- Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $[a, b]$ , que  $(\Gamma')^2 \leq \Gamma\Gamma''$  et en déduire que  $\Gamma$  est ln-convexe.
- Montrer que  $\Gamma'$  s'annule en un  $x_0 \in ]1, 2[$  et nulle part ailleurs.  
On trouve numériquement que  $x_0 \approx 0,89$  et  $\Gamma(x_0) \approx 1,46$ .

8. Montrer que  $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$  au voisinage de  $0^+$  et en déduire sa limite.  
 9. Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $\Gamma$ .  
 10. Tracer son graphe.  
 11. Montrer que  $\forall x > 0, \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x)$ .

Voir aussi **CCINP 29**.

### Solution de 5 : La fonction $\Gamma$

1. En effet, la fonction  $f_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , positive.
- Intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  : par croissances comparées,  $e^{-t} t^{x-1} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2}\right)$ . On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur  $x$ .
  - Intégrabilité sur  $]0, 1]$  :  $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ . Or (Riemann encore, mais pas au même endroit),  $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$  si et seulement si  $x-1 > -1$ , i.e.  $x > 0$ .

Donc  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

2. Par intégration par parties, si  $0 < \varepsilon < A$ ,

$$\int_{\varepsilon}^A e^{-t} t^{x-1} dt = \left[ e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x} \int_a^A e^{-t} t^x dt \quad (1)$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A} \frac{A^x}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

et de plus

$$e^{-\varepsilon} \frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et  $A \rightarrow +\infty$  dans (1),

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

C'est-à-dire  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Comme  $\Gamma(1) = 1$ , pour tout  $n \geq 1, \Gamma(n) = (n-1)!$ .

3. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Et on constate facilement que

**H1** Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

**H2** Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue (continue par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ .

**H3 Domination** La domination, pour la continuité de  $\Gamma$ , est à la fois un peu technique et très importante.

Soit  $S = [a, b], 0 < a < b$ . On a

$$\forall (x, t) \in S \times ]0, +\infty[ \quad 0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq \phi(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominatrice » d'être définie par morceaux.

Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad e^{-t} t^{x-1} \leq \phi_1(t) = e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$$

ou encore

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad e^{-t} t^{x-1} \leq \phi_2(t) = e^{-t} \max(t^{a-1}, t^{b-1})$$

$\phi$  est continue, positive, intégrable sur  $]0, 1]$  car  $\phi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$  avec  $1-a < 1$  et sur  $[1, +\infty[$  car  $\phi(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2}\right)$  par croissances comparées, avec  $2 > 1$ .

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres s'applique bien :  $\Gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_*^+)$ .

4. On reprend

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-t} t^{x-1} = e^{-t+(x-1)\ln t} \end{cases}$$

Et on constate facilement que

**H1** Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  avec pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : (x, t) \longmapsto (\ln t)^k f(x, t).$$

**H2** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

**H3 Dominations** : Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $K = [a, b]$  avec  $0 < a < b$ . On a

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \phi_k(t) = \begin{cases} |\ln t|^k e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \\ |\ln t|^k e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

avec  $\phi_k$  positive, continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ , intégrable sur  $]0, 1]$  car  $\phi_k(t) = \underset{t \rightarrow 0}{o} \left( \frac{1}{t^a} \right)$  avec  $1 - a < a < 1$  et sur  $[1, +\infty[$ , car  $\phi = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

Par théorème de classe  $\mathcal{C}^\infty$  des intégrales à paramètres,  $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_*^+)$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma^{(k)} : (x, t) \longmapsto \int_0^{+\infty} (\ln t)^k f(x, t) dt.$$

5. D'après ce qui précède,  $\Gamma'' \geq 0$ .

6. Appliquer Cauchy-Schwarz à  $f : t \mapsto \sqrt{t^{x-1}e^{-t}}$  et  $g : t \mapsto \ln t \sqrt{t^{x-1}e^{-t}}$  sur  $[a, b]$  puis faire  $a \rightarrow 0$  et  $b \rightarrow +\infty$ .  
On en déduit que  $(\ln \circ \Gamma)'' \geq 0$ .

7. Théorème de Rolle, puis croissance stricte de  $\Gamma'$ .

8.  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$  par continuité.

9. La limite existe par monotonie et  $\Gamma(n) = (n-1)! \rightarrow +\infty$ .

10. À  $x$  fixé, Appliquer le théorème de convergence dominée à  $f_n : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \mathbb{1}_{]0, n]}(t)$ .

Pour la domination, utiliser l'inégalité de convexité  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ln x \leq x-1$ .

Dominatrice :  $\phi : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ .

## Autres exercices

**6** Soit  $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ . Étudier la définition de  $f$ , sa dérivabilité, puis la calculer.

**Solution de 6 :**

On trouve le domaine de définition :  $] -1, +\infty[$ . Sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$  (domination sur tout segment). Et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, en remarquant que  $f$  a pour limite 0 en  $+\infty$  (théorème de convergence dominée),

$$f(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{x+1} \right)$$

**7** Existence et calcul éventuel de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$ .

### Solution de 7 :

La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ , prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite  $x$  en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$ . Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \right)$$

donc,  $\sin$  étant bornée,

$$\frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  et, par suite, sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} \end{cases}$$

**H1** Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\frac{\partial h}{\partial x} : (x, t) \mapsto e^{-t} \cos(xt)$$

**H2** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto h(x, t)$  est intégrable sur cet  $]0, +\infty[$  d'après l'étude initiale.

**H3** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

**H4 Domination** : On a alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi(t) = e^{-t}$$

et  $\phi$  est indépendante de  $x$ , continue (par morceaux suffirait), intégrable sur  $]0, +\infty[$  car positive et d'intégrale égale à 1.

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , on conclut : l'application

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$$

est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$$

On calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise  $f(0) = 0$ .

**8** **Oral Centrale** Définition, continuité et dérivabilités successives de  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ .

### Solution de 8 : Oral Centrale

Le domaine de définition est  $\mathbb{R}_*^+$ . Le changement de variable  $u = x + t$ ,  $t = u - x$  permet de sortir  $x$  de l'intégrale. D'où assez facilement la classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 9 Calcul de l'intégrale de Gauß

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$  et  $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ .

- Démontrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ .
- Calculer  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

### 10 Oral Mines

On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2} dt$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier sa continuité.
3. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
4. Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en  $+\infty$  de  $f$ .

### Solution de 10 : Oral Mines

La fonction  $t \mapsto \frac{1-\cos t}{x^2+t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si  $x=0$  (valeur  $1/2$ ). Comme elle est  $\mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  la fonction  $h$  par

$$h(x, t) = \frac{1-\cos t}{x^2+t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x, t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe  $C^1$ ,  $h$  est dérivable par rapport à  $x$ , et pour tous  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x(1-\cos t)}{(x^2+t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b(1-\cos t)}{(a^2+t^2)^2}$$

(où  $0 < a < b$ ) montre la classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . Donc sur  $\mathbb{R}_*$  par parité. Il est possible de montrer que  $f$  n'est pas  $C^1$  en montrant que  $f'$  a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en  $+\infty$  est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} dt$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en  $+\infty$  est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait  $t = xu$  qui ferait sortir un  $1/x$  :

$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2} du \right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent  $\frac{\pi}{2x}$ .

**11 Oral Mines** Calculer  $f(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-ixu} dx$  pour  $u \in \mathbb{R}$ .

On admet la valeur de l'intégrale de Gauß :  $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (voir exercice 10.)

### Solution de 11 : Oral Mines

On étudie cette intégrale comme fonction de  $u$  :

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ixu} dx$$

On voit qu'elle est  $C^1$  assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre  $f'(u)$  et  $f(u)$  : en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix e^{-x^2-ixu} dx$$

on peut se servir du  $x$  pour intégrer par parties, en primitivant  $x e^{-x^2}$  et en dérivant  $e^{-ixu}$  :

$$f'(u) = -i \left( \left[ \frac{-1}{2} e^{-x^2} e^{-ixu} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2} e^{-x^2} (-iu) e^{-ixu} du \right)$$

ce qui donne

$$f'(u) = -\frac{u}{2} f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante  $K$  telle que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f(u) = K \exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**12 Oral Centrale ; Mines** Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$ .

1. Domaine de définition ?
2. La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  ?
3. Calculer la dérivée de  $f$ , puis  $f$ .

4. Calculer  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\text{Arctan } t}{t}\right)^2 dt$ .

**Solution de 12 : Oral Centrale ; Mines**

Le domaine de définition est  $\mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$  se prolongeant par continuité à  $[0, +\infty[$  et étant  $\underset{t \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{t^3}\right)$ , or  $3 > 1 \dots$  Définissons, sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,

$$h : (x, t) \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

$h$  est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , sa dérivée valant en tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant  $x \notin \{-1, 0, 1\}$ . On cherche  $a, b, c, d$  tels que

$$\frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2 t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que  $a = c = 0$ . On réduit au même dénominateur, on voit que  $b+d = 1$  et  $b+dx^2 = 0$ , d'où les valeurs de  $b$  et  $d$  et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{1}{1+x^2 t^2} - \frac{1}{x^2-1} \frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de  $x \dots$  supposons donc  $x > 0$  et  $x \neq 1$  dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left( \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour  $x = 1$  car  $f'$  est continue. Compte tenu de  $f(0) = 0$  on obtient

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$$

et pour  $x < 0$ , par imparité, on trouve  $-f(-x) \dots$  L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à  $f(1)$ .

**13 Oral Centrale** Calculer, pour  $x$  réel,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$

(on étudiera la classe de  $f$ , et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).



### Solution de 13 : Oral Centrale

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que  $f$  est de classe  $C^2$  (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mais  $f(0) = f'(0) = 0$ , une double primitivation donne alors

$$f(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

### 14 Injectivité de la transformation de Laplace

Soit  $f$  une application continue  $]0, +\infty[$ , à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif  $x_0$  vérifiant  $e^{-x_0 t} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

1. Démontrer que, si  $x > x_0$ , l'application  $t \mapsto e^{-xt} f(t)$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

On note  $\mathcal{L}(f)$  la fonction définie sur  $]x_0, +\infty[$  par  $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ .

2. Démontrer que  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]x_0, +\infty[$ .

3. On suppose que  $\mathcal{L}(f)$  est la fonction nulle.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-nt-(x_0+1)t} f(t) dt = 0$ .

(b) Soit alors  $g$  définie sur  $]0, 1]$  par  $g(u) = u^{x_0} f(-\ln u)$ .

Démontrer que  $g$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$ , et que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^1 u^n g(u) du = 0$ .

(c) En déduire que  $g$ , et donc  $f$ , est la fonction nulle.

*Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.*

### 15 Convolution « temporelle »

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $\mathbb{R}^+$ . On définit leur produit de convolution

$$f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t) dt. \text{ Démontrer que } f \star g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+, \text{ et que } f \star g = g \star f.$$

*Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment  $[0, 1]$ .*

### Solution de 15 : Convolution « temporelle »

Aucun problème de définition ; le changement de variable  $t = x - u$ ,  $u = x - t$  donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable  $t = xu$ , qui donne

$$(f \star g)(x) = x \int_0^1 f(xu)g(x(1-u)) du$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe  $\int$ , avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si  $K$  est un segment inclus dans  $\mathbb{R}^+$ , soit  $M \geq 0$  tel que  $K \subset [0, M]$  ; en définissant  $h$  sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$  par

$$h(x, t) = f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall (x, t) \in K \times [0, 1] \quad |h(x, t)| \leq N_\infty(f|_{[0, M]}) N_\infty(g|_{[0, M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur  $[0, 1]$ .

### 16 Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

On pose, pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  et  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ .

1. Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.

2. Écrire  $g(x)$  sous la forme  $\phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$ , où  $\phi(x)$  et  $\psi(x)$  sont deux intégrales sur l'intervalle  $[x, +\infty[$ .

3. Étudier la continuité de  $f$  et de  $g$ .

4. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et sont toutes les deux solutions de  $y'' + y = \frac{1}{x}$ .

5. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Solution de 16 : Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet**

2. On trouve

$$g(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

4. On a vu que  $f$  et  $g$  étaient continues sur  $[0, +\infty[$ .

**Montrons que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  :**

Pour cela, on définit

$$h : \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}(x, t) \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , la fonction  $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de  $f$ ).

- $h$  est deux fois dérivable (davantage, même !) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-t e^{-xt}}{1+t^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , les fonctions  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \cdot)$  sont continues (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).

- Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , les fonctions  $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\cdot, t)$  sont continues sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

- **Domination** : Soit  $a, b$  tels que  $0 < a < b$  et  $S \subset [a, b]$ . Si  $k = 1$  ou  $k = 2$ , on peut majorer :

$$\forall (x, t) \in S \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$$

et  $\phi_S : t \mapsto \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$  est indépendante de  $x$ , continue (par morceaux suffirait), intégrable sur  $]0, +\infty[$  par comparaison

à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées,  $\frac{t e^{-at}}{1+t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ ).

En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , on conclut :

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

d'où l'on tire facilement  $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$ .

**Montrons que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  :**

On a vu que l'on pouvait écrire, sur  $\mathbb{R}_*^+$ ,

$$g(x) = \phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , de dérivées  $\phi'(x) = -\frac{\sin x}{x}$  et  $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x}$ . Donc  $g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et, pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \cos x \phi'(x) - \sin x \phi(x) + \cos x \psi'(x) + \sin x \psi(x) = -\sin x \phi(x) + \cos x \psi(x)$$

ce qui permet de dire que  $g'$  est de classe  $C^1$ , donc  $g$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et, pour tout  $x > 0$ ,

$$g''(x) = -\sin x \phi'(x) - \cos x \phi(x) + \cos x \psi'(x) - \sin x \psi(x) = \frac{1}{x} - g(x)$$

d'où découle le résultat.

5. La fonction  $f - g$  est solution sur  $\mathbb{R}_*^+$  de l'équation  $y'' + y = 0$ , elle est donc de la forme  $t \mapsto a \cos t + b \sin t$  ou  $t \mapsto A \cos(t + \phi)$ . Mais on remarque que  $f$  a pour limite 0 en  $+\infty$ , par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et de même, comme  $\phi$  et  $\psi$  ont des limites nulles en  $+\infty$ , c'est aussi le cas de  $g$ . Donc  $A = 0$  (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en  $+\infty$  est constante), donc  $f = g$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . Par continuité en 0,  $f(0) = g(0)$ , et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

**17** Démontrer la formule suivante, pour  $x > 1$ ,  $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ .