Intégrales à paramètres

- On parle d'intégrale dépendant d'un paramètre, pour distinguer la « variable d'étude » (x...), appelée aussi paramètre, de la variable d'intégration (t...).
- Devant la question « calculer $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ », on n'aura plus le seul réflexe de chercher à se ramener, par intégrations par parties et changements de variables préalables, à des calculs de primitives. On pourra aussi envisager $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ comme fonction de x, voir si les théorèmes du cours permettent de la dériver, calculer sa dérivée, ou obtenir une relation entre ses dérivées successives...et en déduire la valeur de l'intégrale cherchée.
- **Si Le paramètre n'intervient pas dans les bornes de I.**
  - **Bien poser le problème :**
    C'est important, la suite en dépend. La première phrase aura en général la forme suivante (approximativement) :
    La fonction $f\ :\ (x,t)\longmapsto$ ... est définie sur $A\times I$.
    La détermination de l'intervalle I est primordiale ; en effet, I n'est pas nécessairement donné par l'énoncé, qui demande souvent d'étudier une fonction donnée sous la forme $x\mapsto\displaystyle\int_a^b\ldots$.
    On ne sait pas alors, dans le cas où a et/ou b est finie, si elle est dans I ou pas. En ce qui concerne A, l'énoncé peut le donner explicitement (« montrer que la fonction est de classe C^k sur A »...) ; on peut aussi avoir à le déterminer comme ensemble des valeurs de x pour lesquelles $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.
    Il est important enfin de donner un nom (f, g, etc...) à la fonction étudiée.
  - **Si I est un segment :** La domination ne pose pas de problème, il suffit de dire qu'une fonction continue sur un segment est bornée, et qu'une fonction constante est intégrable sur un segment.
  - **Si I n'est pas un segment :** Il ne faut alors pas oublier de dominer...la rédaction de la question doit montrer que l'on a bien compris ce que signifie dominer : on doit majorer en module par une fonction intégrable sur I et qui ne dépend pas de la variable x (appelée « paramètre »). On est très souvent amené à dominer sur tout segment inclus dans A (x est astreint à rester dans un segment B inclus dans A). Ne pas confondre x et t (d'où l'importance des notations) !
- **Le paramètre n'intervient que dans les bornes de I**
  On doit donc étudier une fonction du type $g\ :\ x\longmapsto\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ où f est continue sur J et u et v sont à valeurs dans J. Soit alors F une primitive de f sur J. On écrit $g(x)=F\big(v(x)\big)-F\big(u(x)\big)$ ce qui permet d'étudier g (par exemple de la dériver, si u et v sont dérivables et f continue).
  Mais ce n'est pas la seule méthode ! on peut en effet rentrer x dans l'intégrale par un changement de variable ; par exemple, $g(x)=\big(v(x)-u(x)\big)\displaystyle\int_0^1 f\big(u(x)+s(v(x)-u(x))\big)\mathrm{d}s$.
  On est alors ramené au cas précédent, sur un segment.
- **Le paramètre est à la fois dans les bornes de I et à l'intérieur de l'intégrale.**
  Le changement de variable du type précédent permet alors de se ramener à des bornes indépendantes du paramètre. On peut aussi utiliser la remarque suivante : soit à étudier $g\ :\ x\longmapsto\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$
  On définit alors la fonction de trois variables définie sur un domaine à déterminer : $h\ :\ (u,v,x)\longmapsto\int_u^v f(x,t)\mathrm{d}t$.
  On calcule les dérivées partielles, et on utilise des techniques sur les fonctions de plusieurs variables : $g(x)=h(u(x),v(x),x)$
- Lorque l'on doit montrer qu'une fonction $x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1, on doit dominer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, mais pas f.

Exercices vus en cours

1 Transformée de Fourier

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ intégrable. Montrer que la fonction $\widehat{f}:x\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Transformée de Laplace

Soit $f:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{K}$ intégrable.

1. Montrer que la fonction $\mathscr{L}(f):x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. On suppose que f a des limites (finies) en 0 et en $+\infty$.
   Montrer que $x\mathscr{L}(f)(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.
3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet
   (a) Montrer que l'intégrale généralisée $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.
   (b) On définit, si $x\geqslant 0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Calculer la limite de F en $+\infty$.
   (c) Montrer que $F(x)\xrightarrow[x\to 0]{}F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.
   On pourra utiliser la fonction $g:x\to\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.
   (d) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer F'.
   (e) En déduire I.

3 CCINP 50

4 CCINP 30

5 La fonction Γ

On définit $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de Γ.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$?
3. Montrer que Γ est continue sur son ensemble de définition.
4. Montrer que Γ est même de classe $\mathscr{C}^\infty$ et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
5. Montrer que Γ est une fonction convexe.
6. Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,b]$, que $(\Gamma')^2\leqslant\Gamma\Gamma''$ et en déduire que Γ est ln-convexe.
7. Montrer que Γ' s'annule en un $x_0\in]1,2[$ et nulle part ailleurs.
   On trouve numériquement que $x_0\approx 0{,}89$ *et* $\Gamma(x_0)\approx 1{,}46$.
8. Montrer que $\Gamma(x)\sim\dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0^+ et en déduire sa limite.
9. Déterminer la limite en $+\infty$ de Γ.
10. Tracer son graphe.

11. Montrer que $\forall x>0$, $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$.

Voir aussi **CCINP 29**.

6 CCINP 29

Autres exercices

7 Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t$. Étudier la définition de f, sa dérivabilité, puis la calculer.

8 Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}\mathrm{d}t$.

9 **Oral Centrale** Définition, continuité et dérivabilités successives de $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

10 **Calcul de l'intégrale de Gauß** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

11 **Oral Mines** On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier sa continuité.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en $+\infty$ de f.

12 **Oral Mines** Calculer $f(u)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x$ pour $u\in\mathbb{R}$.

On admet la valeur de l'intégrale de Gauß : $f(0)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ *(voir exercice **10**.)*

13 **Oral Centrale ; Mines** Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition ?
2. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$?
3. Calculer la dérivée de f, puis f.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t}\right)^2\mathrm{d}t$.

14 **Oral Centrale** Calculer, pour x réel, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

(*on étudiera la classe de f, et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle*).

15 **Injectivité de la transformation de Laplace**

Soit f une application continue $[0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif x_0 vérifiant $e^{-x_0t}f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

1. Démontrer que, si $x>x_0$, l'application $t\mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On note $\mathscr{L}(f)$ la fonction définie sur $]x_0,+\infty[$ par $\mathscr{L}(f)\,:\,x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]x_0,+\infty[$.
3. On suppose que $\mathscr{L}(f)$ est la fonction nulle.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-nt-(x_0+1)t}f(t)dt=0$.

   (b) Soit alors g définie sur $]0,1]$ par $g(u)=u^{x_0}f(-\ln u)$.
   Démontrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u=0$.

   (c) En déduire que g, et donc f, est la fonction nulle.
   Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.

16 **Convolution « temporelle »** Soit f et g deux applications continues sur $\mathbb{R}^+$. On définit leur produit de convolution $f\star g=\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$. Démontrer que $f\star g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et que $f\star g=g\star f$.

Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment $[0,1]$.

17 **Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet** On pose, pour $x\geqslant 0$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
2. Écrire $g(x)$ sous la forme $\phi(x)\cos x+\psi(x)\sin x$, où $\phi(x)$ et $\psi(x)$ sont deux intégrales sur l'intervalle $[x,+\infty[$.
3. Étudier la continuité de f et de g.
4. Démontrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et sont toutes les deux solutions de $y''+y=\frac{1}{x}$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

18 Démontrer la formule suivante, pour $x>1$, $\zeta(x)\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\mathrm{d}t$.