EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, ..., (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

*****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : e^{b\,\ln(a)} \qquad (B) : e^{a\,\ln(b)} \qquad (C) : e^{\ln(a)\,\ln(b)}.$$

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x).$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

*****

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} \mathrm{d}t$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

5.2. Déterminer le sens de variation de F.

5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

5.5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$.

6.1. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n + 1)}{(nx + 1)^{n+1}}$.

6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 + nx)^{n+1}}.$$

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0.$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0.$ $\quad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ par x lorsque x est non nul.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

1.1. Donner, en fonction de r, une matrice W de p dans une base adaptée.

1.2. Donner les spectres possibles de W.

1.3. Comparer $\mathbf{rg}(W)$ et $\mathbf{tr}(W)$.

1.4. Calculer $\mathbf{det}(W)$.

*****

On considère la famille $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\mathbf{tr}(M)$.

2.1. Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T.

2.2. Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathbf{rg}(M)$.

4. On note D la variable aléatoire $\mathbf{det}(M)$.

4.1. Déterminer $D(\Omega)$.

4.2. Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D.

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement Z :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension ».

5.1. On note V l'évènement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbb{P}(V)$.

5.2. On suppose n impair. Déterminer $\mathbb{P}(Z)$.

5.3. On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbb{P}(T = r)$. En déduire $\mathbb{P}(Z)$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = \left(a_{ij}(\omega)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

6.1. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.

6.2. Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.

6.3. Montrer que $\mathbf{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6.4. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.

6.5. Pour tout ω dans Ω, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.

6.6. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.

FIN