Concours Commun INP 2024

Épreuve de mathématiques I, MP, quatre heures

(corrigé)

EXERCICE I

Q 1. On a : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X > k-1) - \mathrm{P}(X > k)$, et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\mathrm{P}(X > k-1) - \mathrm{P}(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[k\mathrm{P}(X > k-1) - (k+1)\mathrm{P}(X > k) + \mathrm{P}(X > k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X > k) + \sum_{k=0}^{n} \left[k\mathrm{P}(X > k-1) - (k+1)\mathrm{P}(X > k)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X > k) - (n+1)\mathrm{P}(X > n) \qquad \text{(lien suite-série)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k) - n\mathrm{P}(X > n).
\end{aligned}$$

Voyons comment en déduire l'expression de l'espérance demandée dans l'énoncé. Comme X admet une espérance, on sait que $\mathrm{E}(X)$ est la limite quand $n \to +\infty$ du membre de gauche. Il suffit donc de montrer, pour avoir le résultat voulu :

$$\lim_{n \to +\infty} n\mathrm{P}(X > n) = 0.$$

Faisons. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant n\mathrm{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1} k\mathrm{P}(X = k),$$

et le membre de droite est le reste d'une série convergente (puisque par hypothèse X admet une espérance), donc converge vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on a la limite nulle voulu. Quand $n \to +\infty$, l'égalité précédente donne donc comme attendu :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k).$$

Autre démonstration. Cette formule découle très rapidement du théorème de Fubini positif. Notons $1_{[k+1,+\infty[} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $[k+1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[k+1,+\infty[}(n)\mathrm{P}(X = n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 1_{[k+1,+\infty[}(n)\mathrm{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{P}(X = n) \\
&= \mathrm{E}(X),
\end{aligned}$$

d'où le résultat... Mais ce n'était pas semble-t-il la philosophie de la question.

Q 2. On a : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Si l'on note X_i le résultat du i^{e} tirage pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, alors on a :

$$(X \leqslant k) = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant p} X_i \leqslant k\right) = \bigcap_{i=1}^{p}(X_i \leqslant k).$$

Comme les X_i sont indépendantes (c'est en tout cas une hypothèse raisonnable, au vu de l'expérience modélisée), on a :

$$\mathrm{P}(X \leqslant k) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{P}(X_i \leqslant k).$$

Comme les X_i suivent une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ (en effet le tirage est supposé équiprobable), on conclut :

$$\mathrm{P}(X \leqslant k) = \prod_{i=1}^{p} \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Remarquons que cette expression reste valable pour $k = 0$. La loi de X s'obtient en écrivant :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \leqslant k) - \mathrm{P}(X \leqslant k - 1) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

Q 3. Il y a bien des façons de calculer cette limite. Nous proposerons une autre façon de procéder en remarque ci-dessous.

L'application $x \mapsto x^p$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc par le théorème sur les sommes de Riemann on a directement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1},$$

Or par la question **Q 1** (qui s'applique puisqu'une variable aléatoire à support fini admet bien sûr une espérance) on a :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \mathrm{P}(X \leqslant k)) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X \leqslant k).$$

Par la question précédente : $\mathrm{E}(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = n\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)$. Il est raisonnable de penser que $p \geqslant 1$, auquel cas : $\frac{1}{p+1} \leqslant \frac{1}{2} < 1$, et donc par ce qui précède :

$$\mathrm{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(1 - \frac{1}{p+1}\right).$$

D'où le résultat.

Remarque. L'application $x \mapsto x^p$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $p \geqslant 1$, une comparaison série-intégrale permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_1^n x^p \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k^p \leqslant \int_0^{n-1} x^p \mathrm{d}x \leqslant \int_0^n x^p \mathrm{d}x.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k^p \leqslant \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Or on a facilement : $\frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{p+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$. D'où : $\sum_{k=1}^{n-1} k^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$. On retrouve alors la limite calculée ci-dessus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{1}{p+1}.$$

EXERCICE II

Q 4. On normalise l'équation (H) en divisant chaque membre par x^2. Comme les applications $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \frac{2-x^2}{x^2}$ sont continues sur I, le théorème de Cauchy linéaire assure que $S_I(H)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Q 5. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Alors f est de classe C^∞ et dérivable terme à terme. Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
&x^2 f''(x) + 4xf'(x) + (2-x^2)f(x) \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n\right) x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1) + 4n + 2\right) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\left(n^2+3n+2\right) a_n - a_{n-2}\right] x^n + 2a_0 + 6a_1 x.
\end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si f et $x \mapsto 1$ coïncident sur un voisinage à droite de l'origine, si et seulement si les coefficients de leurs développements en série entière sont égaux. Si et seulement si :

$$2a_0 = 1, \quad 6a_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \left(n^2+3n+2\right) a_n - a_{n-2} = 0,$$

si et seulement si :

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} a_{n-2}.$$

Cette relation de récurrence et la nullité de a_1 impliquent : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$. Pour déterminer les termes d'indice pair, posons $n = 2j$ ci-dessus et divisons la relation de récurrence par $a_{2j-2} \neq 0$ (une récurrence facile, du fait que a_0 soit non nul, implique que tous les termes d'indice pair sont non nuls). On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2k}}{a_0} = \prod_{j=1}^{k} \frac{a_{2j}}{a_{2(j-1)}} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(2j+1)(2j+2)} = \frac{2}{(2k+2)!},$$

donc f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+2)!} a_0 x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} x^{2k}.$$

Je n'ai montré que le sens direct, le sens réciproque étant immédiat. Pour $x \in I$, cela donne :

$$f(x) = x^{-2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} x^{2(k+1)} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \frac{1}{x^2}\left(\mathrm{ch}(x) - 1\right).$$

Réciproquement, il s'agit bien d'une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (le cosinus hyperbolique est une fonction usuelle et il n'y a pas à redémontrer que le rayon de convergence de la série ci-dessus est infini), solution de (E) par les équivalences ci-dessus. Ce qu'il fallait démontrer.

Q 6. Comme $S_I(E)$ est un espace affine de direction $S_I(H)$, la différence de deux éléments de $S_I(E)$ est un élément de $S_I(H)$. Par conséquent $f-g$ (où f est la fonction de la question précédente) est dans $S_I(E)$. La famille :

$$(f-g,h)$$

est donc une famille de $S_I(H)$, libre puisque $f-g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{x^2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}$ sont respectivement paire et impaire (et on sait que les fonctions paires et les fonctions impaires forment deux sous-espaces vectoriels en somme directe) : c'est donc une base de $S_I(H)$. En utilisant la solution particulière g, on a :

$$S_I(E) = g + S_I(H) = g + \operatorname{Vect}(f-g,h) = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{a\operatorname{ch}(x) + b\operatorname{sh}(x) - 1}{x^2} \end{array} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Q 7. La question posée revient à déterminer les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$. Soit y une telle solution. Elle définit par restriction une solution sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par la question précédente il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $y_{|\mathbb{R}_+^*} = a(f-g) + bh$. Or y doit être continue en 0 (elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$), et un développement limité à l'ordre 2 du cosinus et du sinus hyperbolique donne :

$$y_{|\mathbb{R}_+^*}(x) = \frac{a\left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + b\left(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x^2} = \frac{a + bx + \frac{a}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2}.$$

On montre aisément que cette quantité n'a pas de limite finie en 0, sauf si $a = b = 0$. Ainsi $y_{|\mathbb{R}_+} = 0$.

En reproduisant la même étude que dans les questions précédentes (où, finalement, la seule chose qui comptait était d'être sur un intervalle ne contenant pas 0 : l'étude aurait donc pu être faite sur $\mathbb{R}_-^*$), on montre de même que la restriction de y à $\mathbb{R}_-^*$ doit être combinaison linéaire de $f-g$ et h, puis nulle pour la même raison que sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi : $y = 0$, et donc :

$$\dim(S_{\mathbb{R}}(H)) = 0.$$

PROBLÈME

Q 8. Par le théorème de sommation par paquets (qu'on peut utiliser ici sans hypothèse de sommabilité puisqu'on somme des termes positifs), avec le recouvrement $\mathbb{N} \setminus \{0\} = (2\mathbb{N} \setminus \{0\}) \sqcup (2\mathbb{N}+1)$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in 2\mathbb{N}\setminus\{0\}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in 2\mathbb{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2}.$$

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge évidemment (c'est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$), cette égalité peut se réécrire :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

ce dont on déduit : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3/4}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$

Partie I

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. La dérivée de $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)(\sin(x))^n \cos(x)$.

Pour obtenir une relation entre les intégrales $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$, nous allons intégrer par parties afin d'abaisser le degré de l'exposant $n+2$. Plus précisément : pour obtenir l'exposant n, nous allons dériver $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$ et intégrer $x \mapsto \sin(x)$. La formule de l'intégration par parties donne alors :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x = \Big[-\cos(x) \cdot (\sin(x))^{n+1} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot (\sin(x))^n \cos(x) \mathrm{d}x,$$

donc : $W_{n+2} = (n+1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n (\cos(x))^2 \mathrm{d}x$. En utilisant la formule : $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient :

$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{n+2} \mathrm{d}x = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2},$$

c'est-à-dire $(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$, puis :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On en déduit la relation demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la proposition : « $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. »

Pour $n = 0$ on a : $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, et : $\dfrac{2^{2\cdot 0}(0!)^2}{(2 \cdot 0 + 1)!} = 1 = W_1$, d'où P_0. À présent, si $n \in \mathbb{N}$ est un entier tel que P_n, alors :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)+1} = W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} &= \frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+2)} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

d'où P_{n+1}.

Ayant démontré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Q 10. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ peut s'écrire $x \mapsto (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$: or nous connaissons le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$. Nous allons l'utiliser avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et le composer avec $x \mapsto -x^2$, pour obtenir celui demandé. On a, pour rappel :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N},\ \forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!} x^n.$$

Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $-x^2 \in]-1, 1[$, et on peut donc évaluer en $-x^2$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \left(-x^2\right)^n.$$

Pour les besoins de la question suivante, nous allons simplifier le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\cdot(2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n\prod\limits_{k=1}^{n}k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}.$$

Passons à l'arc sinus. On a :

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\mathrm{d}t.$$

Or la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, donc on peut l'intégrer terme à terme sur tout segment inclus dans $]-1,1[$. On en déduit :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

En conclusion, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}, \quad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Q 11. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En posant $x = \sin(t) \in [0,1[$ dans le développement en série entière de l'arc sinus, on obtient :

$$\arcsin(\sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1},$$

et $\arcsin(\sin(t)) = t$ car $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subseteq \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où le résultat désiré (quitte à renommer t en x).

Q 12. Il s'agit de justifier l'interversion des symboles $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme positif. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

L'application g_n se prolonge en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle y est intégrable et elle est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus elle est positive sur cet intervalle et sa somme est continue (c'est la fonction $x \mapsto x$ d'après la question précédente), donc par le théorème d'intégration terme à terme positif on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n$$

ce qui donne immédiatement le résultat voulu.

Autre démonstration. On pouvait aussi démontrer cette interversion avec l'autre théorème d'intégration terme à terme, valable *a priori* sur les segments, mais cela nécessite de remarquer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge aussi en $x = 1$. Faisons-le. Si on essaie d'appliquer la règle de D'Alembert, on tombe sur le cas d'incertitude $L = 1$. Pour étudier sa nature, nous allons donc déterminer un équivalent asymptotique simple de son terme général, avec la formule de Stirling. On a, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \times \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0,$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge parce que son exposant est $\frac{3}{2} > 1$. Donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ converge. Par le théorème d'Abel radial, on en déduit que le développement en série entière de l'arc sinus reste valable pour $x = 1$, et donc que la relation de la question **Q 11** reste valable pour $x = \frac{\pi}{2}$. Ainsi elle est valable sur un SEGMENT et il suffit de montrer la convergence uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pour intégrer terme à terme. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad g_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $|g_n(x)| \leqslant \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$. On en déduit, par propriété de la borne supérieure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}.$$

Or nous avons démontré ci-dessus que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1}$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \|g_n\|_\infty$ converge donc : d'où le résultat.

Ayant la convergence uniforme de la série de fonctions continues $\sum_{n\geqslant 0} g_n$ sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a d'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(x))^{2n+1}}{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x,$$

d'où le résultat.

Q 13. D'après la question **Q 9** on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x = W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Donc par la question précédente et la question **Q 11** :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or on a facilement : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$. Donc :

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On conclut avec la question **Q 8**, et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II

Q 14. Soit $x \in]-1,1[$. On a : $|x^2| < 1$, donc :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}.$$

On a donc : $\displaystyle\frac{\ln(x^2)}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))$ pour tout $x \in [0,1[$, puis :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x,$$

toutes les fonctions en jeu étant continues par morceaux sur $]0,1[$. L'égalité $(*)$ est licite par le théorème d'intégration terme à terme positif. En effet :

— on a positivité et continuité par morceaux sur $]0,1[$ de la fonction $f_n : x \mapsto -x^{2n}\ln(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

— la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et sa somme est $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$, qui est bien continue sur $]0,1[$;

— il reste à justifier l'intégrabilité sur $]0,1[$ de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $f_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence de son intégrale sur $]0,1[$) ; nous allons faire mieux en calculant l'intégrale sur $]0,1[$ de f_n en même temps, *via* une intégration par parties, où l'on dérive $x \mapsto -\ln(x)$ et intègre $x \mapsto x^{2n}$; comme :

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = \lim_{x\to 1} -\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x) = 0,$$

la formule de l'intégration par parties assure que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 -\frac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x$ sont de même nature (donc convergentes, puisque la seconde est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), et on a :

$$\int_0^1 -x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln(x)\right]_0^1 + \frac{1}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)^2},$$

ce qui montre à la fois l'intégrabilité de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $]0,1[$, et que son intégrale égale $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

En conclusion, on a montré :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-x^{2n}\ln(x))\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ce calcul montre en passant que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ converge, étant donné que cette somme est finie (la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est sommable puisque sa somme est celle d'une série de Riemann d'exposant $2>1$, donc ses familles extraites sont sommables également).

Q 15. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Posons :

$$\forall (x,t)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad g(x,t)=\frac{\arctan(tx)}{1+t^2}.$$

Alors :

— pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout $(t,x)\in(\mathbb{R}_+)^2$, on a :

$$|g(x,t)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}\qquad\text{(hypothèse de domination)}$$

et l'application $\varphi : t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puisqu'elle est continue sur cet intervalle, et que $|\varphi|=\varphi$ admet comme primitive l'arc tangente, qui admet une limite finie (égale à $\dfrac{\pi}{2}$) en $+\infty$.

Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, d'une part $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, et d'autre part f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, ce qu'il fallait démontrer.

Q 16. On reprend les notations de la question précédente. Nous allons utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

— pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, l'application $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,1]$ et on a :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+\times]0,1],\quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\ ;$$

— pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question précédente ;

— pour tout $x\in]0,1]$, l'application $t\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$;

— pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,1]$ et tout $(t,x)\in\mathbb{R}_+\times[a,b]$, on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}.\qquad\text{(hypothèse de domination)}$$

Justifions que l'application $\varphi : t\mapsto \dfrac{t}{(1+(at)^2)(1+t^2)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: elle est continue sur cet intervalle, et on a :

$$\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{1}{a^2}\frac{1}{t^3}>0,$$

or on sait que les fonctions de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1 sont intégrables au voisinage de $+\infty$, donc par comparaison il en est de même de φ : d'où le résultat.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment de $]0,1]$, d'une part $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x \in]0,1]$, et d'autre part f est de classe C^1 sur $]0,1]$. De plus :

$$\forall x \in]0,1], \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+(xt)^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Q 17. Soit $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1[$. On a :

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2} = \frac{t(1+t^2x^2) - x^2t(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t^2x^2)} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+t^2x^2)}$$

et on en déduit, par la question précédente :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2x^2)}{2}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^2x^2}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2(1-x^2)} \\ &= -\frac{\ln(x)}{1-x^2},\end{aligned}$$

d'où le résultat, quitte à multiplier par -1 le dénominateur.

Q 18. On a :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0, \quad f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\arctan(t)^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8},$$

or en intégrant la relation de la question précédente, on a l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = c + \int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

Calculons la limite de chaque membre en 0. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$ converge par la question **Q 14**, on a : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{\ln(t)}{t^2-1}\mathrm{d}t = 0$. De plus f est continue en 0 par la question **Q 15**, donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Ainsi l'égalité ci-dessus donne, quand $x \to 0$:

$$0 = c.$$

Cette même égalité donne, quand $x \to 1$, toujours par continuité de f :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x = f(1) = \frac{\pi^2}{8}.$$

On en déduit, par la question **Q 14** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut avec la question **Q 8**, et on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.