Programme de colle – MPI

1. Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les séries entières donnent un outil puissant pour aborder certains calculs : résolution d'équations différentielles linéaires, fonctions génératrices en probabilités... Elles permettent également de revenir sur la thématique de la régularité des fonctions, introduite en première année, et donnent l'occasion d'introduire la « variable complexe ».

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0,+\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.	
Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.	La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $\lvert z\rvert < R$, et elle diverge grossièrement si $\lvert z\rvert > R$.
Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	Rayon de convergence de $\sum n^\alpha x^n$.
Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.	La limite du rapport $\dfrac{\lvert a_{n+1}\rvert}{\lvert a_n\rvert}$ peut être utilisée directement.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe	
Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	
c) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle	
Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.	La démonstration est hors programme.
La somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	Relation $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un intervalle $]0,\alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
d) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R,R[$.	Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	
Développements usuels dans le domaine réel.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

2. Probabilités (début)

Extrait du programme officiel :

Cette section généralise aux variables aléatoires discrètes l'étude menée en première année des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini. Cette généralisation nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités, lesquelles font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu, introduite pour donner un cadre rigoureux, n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

La théorie des familles sommables permet une extension très naturelle des notions et résultats vus en première année. Cette extension est effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour les exemples et exercices. L'objectif de l'enseignement est en effet de renforcer la compréhension de l'aléatoire, en lien avec d'autres parties du programme. On pourra ainsi faire travailler les étudiants sur divers objets aléatoires (permutations, graphes, matrices...) les inégalités de concentration et des exemples de processus à temps discret (marches aléatoires, chaînes de Markov...).

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
b) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$.	La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).	Systèmes quasi-complets d'événements. Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.	Lorsque $P(B)>0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B)=P(A)$.
Famille d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	
d) Espaces probabilisés discrets	
Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par Ω et de somme 1.	Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable.
Probabilité définie sur $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω.	Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathscr{P}(\Omega)$.

Semaine prochaine : Probabilités. Espaces préhilbertiens réels.

3. Questions de cours

(i) Liste des développements en série entière des fonctions usuelles au programme.

(ii) ✱ Développement en série entière de $x\mapsto(1+x)^\alpha$ à l'aide d'une équation différentielle.

(iii) **CCINP 2, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 32, 47, 51, 101, 105, 107.**

4. Exercices CCINP

- **CCINP 2** : On pose $f(x)=\dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
  1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
  2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
     Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
  3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$.
     On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.
     Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
     (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- **CCINP 18** : On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.
  On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$.
  1. Étudier la convergence simple de cette série.
     On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
  2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
     (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
     (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.
- **CCINP 20** :
  1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
  2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :
     (a) $\displaystyle\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}z^{2n+1}$. (b) $\sum n^{(-1)^n}z^n$. (c) $\sum\cos(n)z^n$.
- **CCINP 21** :
  1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
  2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
  3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?
- **CCINP 22** :
  1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
  2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x\longmapsto\ln(1+x)+\ln(1-2x)$.
     La série obtenue converge-t-elle pour $x=\frac{1}{4}$? $x=\frac{1}{2}$? $x=-\frac{1}{2}$?
- **CCINP 23** : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.
  1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
     On le note R.
  2. Démontrer que la fonction $x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.
- **CCINP 24** :
  1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum\frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.
  2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x\mapsto\mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
  3. (a) Déterminer $S(x)$.
     (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
     $$f(0)=1,\quad f(x)=\mathrm{ch}\sqrt{x}\ \text{si}\ x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x}\ \text{si}\ x<0\ .$$
     Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- **CCINP 32** : Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
  1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r>0$. Déterminer la somme des séries entières obtenues.
  2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$?

- **CCINP 47** : Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

  1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
  2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

- **CCINP 51** :

  1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

     On se propose de calculer la somme de cette série.

  2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
     Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
  3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
  4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

- **CCINP 101** : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
  À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
  Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
  L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.

  On note A_n l'événement « l'animal est en A après son n^{e} trajet ».
  On note B_n l'événement « l'animal est en B après son n^{e} trajet ».
  On note C_n l'événement « l'animal est en C après son n^{e} trajet ».

  On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.

  1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
     (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
  2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

     (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

     (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

     (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
     Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

  3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
     Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

- **CCINP 105** :

  1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
  2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
     Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

     (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
     Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

     (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
     On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
     Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

     (c) Déterminer la limite de (p_n). Interpréter ce résultat.

- **CCINP 107** : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
  L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
  L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
  On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

  - On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
  - On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
  - Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
  - Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au n^{e} tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

  1. Calculer p_1.
  2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
  3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.