NDLR : On admet (provisoirement) le **théorème de Cauchy linéaire** qui dit que :

> Soit (E) : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = d(x)$ et (H) : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x) = 0$ avec a, b, c, d des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a **ne s'annulant pas sur I.**
>
> - Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution f de (L) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_0'$ (problème de Cauchy).
> - L'ensemble $S_I(H)$ des solutions de (H) sur I est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ (donc de dimension 2).
> - L'ensemble des $S_I(E)$ solutions de (E) est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, de direction $S_I(H)$:
> $$S_I(E) = f_0 + S_I(H)$$
> où f_0 est une solution particulière.

Concours Commun INP 2024

Épreuve de mathématiques I, MP – MPI

EXERCICE

On considère les équations différentielles :

$$\begin{array}{rcll} x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y & = & 1 & (E) \\ x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y & = & 0 & (H) \end{array}$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q 1. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q 2. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q 3. On note pour $x \in I$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}$.
On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.
Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q 4. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

PROBLÈME

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q 5. Question préliminaire
Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q 6. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q 7. Déterminer sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \arcsin(x)$.

Q 8. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

Q 9. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \mathrm{d}x$.

Q 10. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q 11. Donner sur l'intervalle $]-1,1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q 12. On pose pour $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Q 13. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q 14. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q 15. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

FIN