2025

# Banque CCINP – MP-MPI

## Exercice 1

CC BY NC SA


**Exercice 2 : Analyse**

**On pose** $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. **Décomposer** $f(x)$ **en éléments simples.**
2. **En déduire que** $f$ **est développable en série entière sur un intervalle du type** $]-r, r[$ **(où** $r > 0$**).**
   **Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité** $D$ **de ce développement en série entière.**
3. **(a) Soit** $\sum a_n x^n$ **une série entière de rayon** $R > 0$.
   **On pose, pour tout** $x \in ]-R, R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   **Exprimer, pour tout entier** $p$**, en le prouvant,** $a_p$ **en fonction de** $g^{(p)}(0)$.
   **(b) En déduire le développement limité de** $f$ **à l'ordre** $3$ **au voisinage de** $0$.

---

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve $\boxed{f(x) = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{(x+1)^2}.}$

2. D'après le cours, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.
   De plus, on a $\forall x \in ]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent). On en déduit que $f$ est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière. Et

$$\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = 3\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

   C'est-à-dire $\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (4n+7) x^n.}$

   Notons $D$ le domaine de validité du développement en série entière de $f$. D'après ce qui précède, $]-1,1[ \subset D$.
   Notons $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$. D'après ce qui précède $R \geqslant 1$.

   Posons, pour tout entier naturel $n$, $a_n = (-1)^n (4n+7)$.
   Pour $x = 1$ et $x = -1$, $|a_n x^n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $\sum (-1)^n (4n+7) x^n$ diverge grossièrement et ainsi $R \leqslant 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

   On en déduit que $\boxed{D = ]-1,1[.}$

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose, pour tout $x \in ]-R, R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   D'après le cours, $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in ]-R, R[,\ g^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p! a_p$ (tous les termes pour $n > p$ sont nuls). C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\boxed{a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}.}$

   (b) $f$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-1,1[$. Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de $0$,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{3} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

   Or, d'après les questions précédentes, pour tout entier $p$, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = (-1)^p (4p+7)$.

   Ainsi, au voisinage de $0$, $\boxed{f(x) = \sum\limits_{p=0}^{3} (-1)^p (4p+7) x^p + \mathrm{o}\left(x^3\right) = f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right).}$

**Exercice 3 : Analyse**

1. **On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Calculer, pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définitions respectifs.**
2. **On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$. En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{e}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.**
3. **Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.**

---

1. $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On prouve, par récurrence, que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.}$$

2. $g$ et $h$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\boxed{f^{(n)}(x)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = \boxed{n! e^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.}$$

3. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété « Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont $n$ fois dérivables sur $I$ alors, $fg$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et

$$\boxed{\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).} \text{ »}$$

Prouvons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies (dérivée d'un produit).
- Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur $I$.
  Les fonctions $f$ et $g$ sont, en particulier, $n$ fois dérivables sur $I$ et donc par hypothèse de récurrence la fonction $fg$ l'est aussi avec $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
  Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur $I$ donc par opérations sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur $I$. Ainsi la fonction $fg$ est $(n+1)$ fois dérivable et

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left( f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

  En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

  C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$ avec $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$.

  Or, en utilisant la formule de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

  On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, ce qui établit la récurrence.

**Exercice 4 : Analyse**

1. **Énoncer le théorème des accroissements finis.**
2. **Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in\,]a,b[$.**
   **On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.**
   **Démontrer que, si $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.**
3. **Prouver que l'implication : ($f$ est dérivable en $x_0$) $\Longrightarrow$ ($f'$ admet une limite finie en $x_0$) est fausse.**
   **Indication : on pourra considérer la fonction $g$ définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.**

---

1. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. On suppose que
   **H1** $f$ est continue sur $[a,b]$
   **H2** $f$ est dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c\in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
2. On suppose que $f'(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}\ell$.
   Soit $h\neq 0$ tel que $x_0+h\in[a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction $f$, entre $x_0$ et $x_0+h$, on peut affirmer qu'il existe $c_h$ strictement compris entre $x_0$ et $x_0+h$ tel que
   $$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(c_h)h.$$
   Quand $h\to 0$ (avec $h\neq 0$), on a, par encadrement, $c_h\to x_0$. Donc
   $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(c_h)\xrightarrow[x\to x_0]{}f'(x)=\ell.$$
   On en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0)=\ell.}$
3. La fonction $g$ proposée dans l'indication est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ par opérations.
   $g$ est également dérivable en $0$ si $x\neq 0$, $g(x)=x\times\underbrace{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}=o(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$ de $g$ donc $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0}$
   et $g'(0)=0$.
   *Autre argument possible* : $\dfrac{g(h)-g(0)}{h}=h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0$ car le sinus est borné.
   Cependant,
   $$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ g'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
   avec $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ car le sinus est borné, mais $x\longmapsto\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $0$ car $\cos\left(\dfrac{1}{(n\pi)^{-1}}\right)=(-1)^n$.
   Donc $\boxed{g' \text{ n'a pas de limite en } 0.}$

### Exercice 5

**Exercice 6**

**Exercice 7**

**Exercice 8**

**Exercice 9**

**Exercice 10 : Analyse**

**On pose** $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$**.**

1. **Démontrer que la suite de fonctions** $(f_n)$ **converge uniformément sur** $[0,1]$**.**
2. **Calculer la limite lorsque** $n \to +\infty$ **de** $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$**.**

---

1. Pour $x \in [0,1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (x^2+1)\mathrm{e}^x$ : la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$. On a

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|(x^2+1)\frac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n+x}\right| \leqslant \frac{2\mathrm{e}}{n} \text{qui ne dépend pas de } x.$$

donc $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n} \to 0$ puis $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1].}$$

2. **H1** Toutes les s $f_n$ sont continues sur $[0,1]$ ;
   **H2** $(f_n)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.
   On peut intervertir limite et intégrale :

$$\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

En effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\boxed{\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3.}$

**Exercice 11**

CC BY NC SA


**Exercice 12**

**Exercice 13**

**Exercice 14 : Analyse**

1. **Soit $a$ et $b$ deux réels donnés avec $a<b$. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.**
   **Démontrer que si la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $f$, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.**
2. **Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.**
3. **Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.**

---

1. $f_n-f$ est bornée à partir d'un certain rang, et à partir de ce rang, on peut écrire

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^b\left|f_n(t)-f(t)\right|\mathrm{d}t\leqslant(b-a)\left\|f_n-f\right\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

2. Il suffit de l'appliquer à la suite des sommes partielles $(S_n)$ dont la convergence uniforme en tant que suite de fonctions est équivalente à la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f_n$. Par ailleurs, la continuité des fonctions $f_n$ implique celle des sommes partielles $S_n$.
3. **H1** $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

   **H2** La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (si $f_n: x\mapsto x^n$, alors $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{2^n}$ qui est un terme général de série géométrique convergente).

   On en déduit alors que

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}}.$$

**Exercice 15 : Analyse**

**Soit $X$ une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ .**

1. **Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   **Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur $X$, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $X$.**
2. **Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur $X$ est uniformément convergente sur $X$.**
3. **La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre $0$ et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$ ?**

---

1. On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $X$ lorsque les $f_n$ sont toutes bornées au moins à partir d'un certain rang et la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

   On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $X$ lorsque la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge uniformément, ce qui équivaut à la convergence uniforme de suite $(R_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)$ vers la fonction nulle.
2. En cas de convergence normale, on a, au moins à partir d'un certain rang, pour tout $x \in X$, $|f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ donc convergence absolue de $\sum f_n(x)$ et donc convergence simple de $\sum f_n$ sur $X$. On peut donc bien parler de reste.
   Puis, par inégalité triangulaire, pour tout $x \in X$,
   $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty,$$
   le dernier terme ne dépendant pas de $x$ et tendant vers $0$ comme reste de série convergente, donc $(R_n)_n$ converge uniformément vers $\tilde{0}$ et donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge uniformément sur } X.}$
3. On pose, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n^2}{n!} \neq 0$. Alors
   $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{n^2} \to 0.$$
   On en déduit, par critère de d'Alembert, que la série entière $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$.
   En particulier, d'après 2., $\boxed{\text{cette série entière converge uniformément sur tout disque de centre } 0 \text{ et de rayon } R.}$

CC BY NC SA

**Exercice 16 : Analyse**

**On considère la série de fonctions de terme général $f_n$ définie par :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

**On pose, lorsque la série converge,**

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

1. **Démontrer que $S$ est définie sur $[0,1]$.**
2. **On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.**

   **En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.**

   **En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.**
3. **Démontrer que $S$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.**

---

1. On a, pour tout $x \in ]0,1]$, $-f_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$ terme général positif de série convergente, donc, par comparaison, $\sum f_n(x)$ converge. C'est aussi le cas pour $x=0$ car $f_n(0)=0$. Donc $\boxed{S \text{ est bien définie sur } [0,1].}$
2. Comme

   $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n},$$

   $u_n$ est la somme partielle d'ordre $n$ de la série précédente pour $x=1$, donc $\boxed{u_n \to S(1).}$

   Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - u_n = \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$ et donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n.}$
3. **H1** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$

   **H2** D'après la question 1, $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

   **H3** $\forall x \in [0,1]$, $f_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$,

   $$|f_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

   On en déduit que $\|f_n'\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$ qui est un terme général positif de série convergente.

   Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.

   On peut alors affirmer que la fonction $\boxed{S \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$ et on a $\forall x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$.

   En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = -1$ par télescopage. Donc $\boxed{S'(1) = -1.}$

**Exercice 17**

**Exercice 18 : Analyse**

**On pose :** $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. **On considère la série de fonctions** $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de cette série.**
   **On note** $D$ **l'ensemble des** $x$ **où cette série converge et** $S(x)$ **la somme de cette série pour** $x \in D$.
2. **(a) La fonction** $S$ **est-elle continue sur** $D$ **?**
   **(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur** $D$.
   **(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur** $[0,1]$.

---

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
   En $x = 1$, il y a convergence par le théorème spécial des séries alternées.
   En $x = -1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $\boxed{D = ]-1,1]}$.
2. (a) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, $S$ est continue sur $]-1,1[$.
   En $x = 1$, il s'agit de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$, dont la convergence est assurée par le théorème spécial des séries alternées.
   Le théorème d'Abel radial permet alors d'affirmer directement la continuité de $S$ en $1$, et donc finalement $\boxed{S \text{ est continue sur } D \text{ entier.}}$

   (b) $\forall\, x \in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$, donc $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ (atteint en $x = 1$) et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

   Donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n \text{ ne converge pas normalement sur } D.}$

   $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n} x^n \text{ ne converge pas uniformément sur } D \text{ non plus}}$ car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en $-1$ et cela entraînerait la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, ce qui est absurde.

   (c) On étudie la convergence uniforme sur $[0,1]$ .

   Pour tout $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées : $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ décroît et tend vers $0$. Cela permet de majorer son reste $R_n$. On a

$$\forall\, x \in [0,1],\ |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \text{ qui ne dépend pas de } x.$$

   Donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. Donc, $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$

   **Bilan final** : En regroupant tous les résultats obtenus et le cours sur les séries entières, on peut affirmer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$ et converge uniformément sur tout segment de $]-1,1]$.

**Exercice 19 : Analyse**

1. **(a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.**
   **Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.**

   **(b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle :** $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2. **(a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe :** $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

   **(b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.**

   **(c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe :** $z \mapsto \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

---

1. (a) On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions :
   - **H1** les $f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R,R[$ ;
   - **H2** la série de fonction converge simplement sur $]-R,R[$ ;
   - **H3** la série des $f_n'$ qui a même rayon de convergence converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$.

   (b) Et donc, en dérivant $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\boxed{\forall x \in ]-1,1[, \quad \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.}$

2. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\boxed{\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.}$

   (b) Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont de rayon $R_a$ et $R_b$ respectivement, alors la série des $\sum \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ est de rayon de $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout $z$ tel que $|z| < R_c$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

   (c) En effectuant le produit de Cauchy de $\sum z^n$ avec elle-même, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.}$$

**Exercice 20 : Analyse**

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
2. **Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :**

   **(a)** $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   **(b)** $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

   **(c)** $\sum \cos(n) z^n$.

---

1. Donner les deux définitions :
   - Celle du programme : $R = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}^+,\ \left(a_n r^n\right) \text{ bornée}\right\}\right) \in [0, +\infty]$
   - Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R \in [0, +\infty]$ tel que

$$|z| < R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z| > R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. (a) Comme la série entière est lacune, on utiliser le critère de d'Alembert général : pour $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{(n+1)!^2\,|z|^{2n+3}\,(2n)!}{(2n+2)!n!^2\,|z|^{2n+1}} \to \frac{|z|^2}{4},$$

   donc la série entière converge absolument si $|z| < 2$ et diverge grossièrement si $|z| > 2$ : $\boxed{R = 2.}$

   (b) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$$

   et comme les séries entières $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum n z^n$ ont un rayon de convergence égal à celui de $\sum z^n$ donc $1$, c'est aussi le cas de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ : $\boxed{R = 1.}$

   (c) La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers $0$ (sinon, on a un problème avec $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1 \ldots$) donc la série $\sum \cos(n) 1^n$ ne converge pas absolument, donc $\boxed{R = 1.}$

   *Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.*

**Exercice 21 : Analyse**

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
2. **Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ ? Justifier.**
3. **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ ?**

---

1. Donner les deux définitions :
   - Celle du programme : $R = \sup\left(\left\{r\in\mathbb{R}^+,\ \left(a_n r^n\right) \text{ bornée}\right\}\right) \in [0,+\infty]$
   - Celle la plus utile en pratique : c'est l'unique $R\in[0,+\infty]$ tel que

$$|z|<R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument}$$

$$|z|>R \Longrightarrow \sum a_n z^n \text{ diverge grossièrement}$$

2. Comme $\sum a_n 1^n$ et $(a_n 1^n)$ est bornée, $1$ est sur le cercle de convergence : $\boxed{R=1.}$
3. Pour tout $n\geqslant 1$,

$$0\leqslant a_n = \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqslant \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqslant \sqrt{n}\frac{1}{\sqrt{n}}=1$$

par l'inégalité de convexité classique sur le $\ln$ (au programme de première année) donc $(a_n)$ est bornée.
De plus,

$$a_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n} \quad \text{terme général positif de série divergente}$$

donc $\sum a_n$ diverge par comparaison.

Autre argument possible : $a_{2n}=\sqrt{2n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)\longrightarrow 1$ donc $a_n \not\to 0$ : la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Donc $\boxed{R=1.}$

CC BY NC SA


**Exercice 22 : Analyse**

1. **Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.**
2. **Développer en série entière au voisinage de $0$, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f\ :\ x \longmapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.**

   **La série obtenue converge-t-elle pour $x=\frac{1}{4}$ ? $x=\frac{1}{2}$ ? $x=-\frac{1}{2}$ ?**

   **En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?**

---

1. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$.

   On note $R_{a+b}$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$.

   Alors $R_{a+b}\geqslant \min(R_a,R_b)$ avec égalité si $R_a\neq R_b$.

   **En effet**, Si $|z|\leqslant \min(R_a,R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b}\geqslant \min(R_a,R_b)$.
   Si $R_a\neq R_b$, par exemple $R_a<R_b$, $z$ tel que $R_a<|z|<R_b$, alors $a_nz^n\not\to 0$ et $b_nz^n\to 0$ donc $(a_n+b_n)z^n\not\to 0$ et $|z|\geqslant R_{a+b}$ puis $R_a\geqslant R_{a+b}\geqslant \min(R_a,R_b)=R_a$.

2. Pour $|x|<1$, $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Pour $|x|<\frac{1}{2}$, $\ln(1-2x)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n$.

   D'après 1., le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.

   Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de $f$ contient $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, et, $\boxed{\text{pour } |x|<\frac{1}{2},\ f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n.}$

   **Pour** $x=\frac{1}{4}$ **:** $\boxed{\text{la série entière converge et est continue en } \frac{1}{4}}$ car $\frac{1}{4}\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

   **Pour** $x=\frac{1}{2}$ **:** $\boxed{\text{la série entière diverge}}$ car elle est la somme d'une série convergente : $\frac{1}{2}$ appartient à $]-1,1[$, intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, et d'une série divergente : la série harmonique.

   **Pour** $x=-\frac{1}{2}$ **:** $\boxed{\text{la série entière converge}}$ en $-\frac{1}{2}$ comme somme de deux séries convergentes. En effet,

   - d'une part, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2}\in]-1,1[$ ;
   - d'autre part, $\sum\limits_{n\geqslant 1}-\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées : la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante et de limite nulle.

   $\boxed{\text{La continuité de la somme de la série entière en ce point est alors assurée}}$ par le théorème d'Abel radial appliqué à $x\mapsto f(-x)$.

   **Remarque** : Soit $\sum a_nx^n$ est une série entière de rayon $R>0$. On note $f$ la somme de cette série entière sur son domaine de convergence.
   La version du théorème d'Abel radial au programme assure que

   $$\text{si } \sum a_nR^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n.$$

   En considérant la fonction la fonction $x\longmapsto f(-x)$ qui est la somme de la série entière $\sum(-1)^na_nx^n$ (de rayon de convergence toujours égal à $R$), on a immédiatement l'extension suivante

   $$\text{si } \sum a_n(-R)^n \text{ converge alors } \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n \xrightarrow[x\to -R^+]{} \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(-R)^n.$$

**Exercice 23 : Analyse**

**Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.**

1. **Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note $R$.**
2. **Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.**

---

1. On pose $\ell$ la limite de la suite convergente $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Alors, d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières, $R\left(\sum a_n x^n\right) = R = \dfrac{1}{\ell}$ (avec $R=+\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R=0$ dans le cas $\ell=+\infty$).

   Puis, comme $\dfrac{|(n+1)a_{n+1}|}{|na_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $\boxed{R\left(\sum (n+1)a_{n+1}x^n\right) = \dfrac{1}{\ell} = R = R\left(\sum a_n x^n\right).}$
2. On pose, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, x\in\,]-R,R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.
   Soit $r\in[0,R[$. On pose $D_r = [-r,r]$.
   - **H1** $\sum f_n$ converge simplement sur $D_r$.
   - **H2** $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D_r$ .
   - **H3** D'après 1., $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence $R$.
     Donc, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$, donc converge uniformément sur $D_r$.

   On en déduit que $\forall\, r\in[0,R[$, $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D_r$. Donc,

$$\boxed{S \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } ]-R,R[.}$$

**Exercice 24 : Analyse**

1. **Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.**

   **On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ .**

2. **Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.**

3. **(a) Déterminer $S(x)$.**

   **(b) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :**

   $$f(0)=1,\quad f(x)=\mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x>0,\quad f(x)=\cos\sqrt{-x} \text{ si } x<0\ .$$

   **Démontrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.**

---

1. Par critère de d'Alembert, comme $\left|\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \longrightarrow 0$,

   $$\boxed{\text{la série entière } \sum \frac{x^n}{(2n)!} \text{ a pour rayon de convergence } +\infty.}$$

2. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ de rayon de convergence } +\infty.}$

3. (a) $\boxed{\text{Pour } x \geqslant 0,}$ on peut écrire $x = t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(t)$ donc $\boxed{S(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x}.}$

   $\boxed{\text{Pour } x < 0,}$ on peut écrire $x = -t^2$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos(t)$ donc $\boxed{S(x) = \cos\sqrt{-x}.}$

   (b) D'après la question précédente, $\boxed{f = S \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.

**Exercice 25 : Analyse**

1. **Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.**
2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de $(u_n)$.**

---

1. $f : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$.

   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

   donc $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ converge et ainsi, par positivité, $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Autre rédaction possible : dans $[0,+\infty]$,

$$0 \leqslant \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

   d'où la convergence de l'intégrale puis l'intégrabilité par positivité.

2. **H1** La suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t \in [0,1[ \\[2mm] \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t = 1 \\[2mm] 0 & \text{si } t \in ]1,+\infty[ \end{cases}$$

   **H2** Les fonctions $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.

   **H3** $\forall t \in [0,+\infty[, \left|f_n(t)\right| \leqslant \phi(t)$ avec $\phi$ positive, continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Alors, d'après le théorème de convergence dominée,

$$u_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

   Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}.}$

**Exercice 26 : Analyse**

**Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.**

1. **Justifier que $I_n$ est bien définie.**
2. **(a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

   **(b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**
3. **La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?**

---

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, $f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$. Or $2n > 1$, donc $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ par critère de Riemann. Donc, par équivalence, $\boxed{f_n \text{ est intégrable}}$ sur $[1,+\infty[$ donc $\boxed{\text{sur } [0,+\infty[.}$

2. (a) $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $f_{n+1}(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^n} = f_n(t)$ car $1+t^2 \geqslant 1$.

   En intégrant, on obtient
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} \leqslant I_n.$$
   Donc $\boxed{(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   **H1** La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f$ définie sur $[0,+\infty[$ par
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (On peut aussi appliquer le théorème sur $]0,+\infty[$ pour ne pas avoir à traiter le cas particulier de $x = 0$.)

   **H2** Les $f_n$ et $f$ sont continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

   **H3 Domination**
   $$\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \phi(t)$$
   avec $\phi$ continue et positive sur $[0,+\infty[$ et
   $$\int_0^{+\infty} \left|\phi(t)\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty,$$
   donc $\phi$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Par le théorème de convergence dominée on obtient
   $$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
   et $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ a pour limite } 0.}$

3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers $0$.
   Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer que
   $$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n \text{ converge.}}$$

**Exercice 27 : Analyse**

**Pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**, on pose** $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ **et** $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. **Étudier la convergence simple de la suite de fonctions** $(f_n)$ **sur** $[0,1]$.
2. **Soit** $a \in ]0,1[$. **La suite de fonctions** $(f_n)$ **converge-t-elle uniformément sur** $[a,1]$ **?**
3. **La suite de fonctions** $(f_n)$ **converge-t-elle uniformément sur** $[0,1]$ **?**
4. **Trouver la limite de la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

---

1. On a déjà $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Soit $x \in ]0,1]$. Pour $n$ au voisinage de $+\infty$, $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f$ définie par

   $$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

2. Soit $a \in ]0;1[$.

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,1],\ |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$$

   Comme cette majoration est indépendante de $x$, $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.

   Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\|f_n - f\|_{\infty,[a,1]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit que $\boxed{(f_n) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [a,1].}$

3. Les fonctions $f_n$ étant continues sur $[0,1]$ et la limite simple $f$ ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a $\boxed{\text{pas convergence uniforme sur } [0,1].}$

4. **H1** $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $[0,1]$.

   **H2** Les fonctions $f_n$ et $f$ sont continues par morceaux sur $[0,1]$.

   **H3** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall x \in [0,1], |f_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 = \varphi(x)$ avec $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue, positive, intégrable sur $[0,1]$.

   D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc affirmer que :

   $$\boxed{u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

**Exercice 28 : Analyse**

***N.B. : les deux questions sont indépendantes.***

1. **La fonction** $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ **est-elle intégrable sur** $]2,+\infty[$ **?**
2. **Soit** $a$ **un réel strictement positif.**
   **La fonction** $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ **est-elle intégrable sur** $]0,+\infty[$ **?**

---

1. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ continue sur $]2,+\infty[$. De plus,

   **Sur** $]2,3]$

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} \underset{x\to 2}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} \times \frac{1}{(x-2)^{1/2}}.$$

   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-2)^{1/2}}$ est intégrable sur $]2,3]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]2,3]$ car $\dfrac{1}{2} < 1$).
   Donc, par comparaison, $f$ est intégrable sur $]2,3]$.

   **Sur** $[3,+\infty[$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = g(x.)$$

   Or $x^2 g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc, au voisinage de $+\infty$, $g(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
   Comme $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[3,+\infty[$, on en déduit que $g$ est intégrable sur $[3,+\infty[$.
   Donc, par comparaison, $f$ est intégrable sur $[3,+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } ]2,+\infty[.}$

2. **Cas particulier d'intégrales de Bertrand** : soit $a$ un réel strictement positif. On pose $f : x \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$, fonction continue sur $]0,+\infty[$.

   **Sur** $]0,\mathrm{e}]$

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x = g(x).$$

   Or $\sqrt{x}g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, au voisinage de 0, $g(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)$.
   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$ car $1/2 < 1$).
   Donc $g$ est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$, et, par comparaison, $f$ est intégrable sur $]0,\mathrm{e}]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   **Sur** $[\mathrm{e},+\infty[$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^a} = h(x).$$

   **si** $a > 1$, prenons $\gamma$ tel que $1 < \gamma < a$.

$$x^\gamma h(x) = x^{\gamma-a}\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

   donc, au voisinage de $+\infty$, $h(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\gamma}\right)$.

   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\gamma}$ est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ car $\gamma > 1$), donc $h$ est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
   Ainsi, par comparaison, $f$ est intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

   **si** $a \leqslant 1$,

$$\forall x \in [\mathrm{e},+\infty[,\ h(x) \geqslant \frac{1}{x^a} \geqslant 0$$

   (C'est la raison pour laquelle on a coupé l'intervalle en $\mathrm{e}$.)

   Or $x \longmapsto \dfrac{1}{x^a}$ non intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$ (fonction de Riemann avec $a \leqslant 1$), donc, par comparaison de fonctions positives, $h$ n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.
   Ainsi, par équivalence, $f$ n'est pas intégrable sur $[\mathrm{e},+\infty[$.

   Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[ \text{ si et seulement si } a > 1.}$

**Exercice 29 : Analyse**

**On pose** $\forall\, x \in ]0,+\infty[,\ \forall\, t \in ]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ **.**

1. **Démontrer que :** $\forall\, x \in ]0,+\infty[$**, la fonction** $t \mapsto f(x,t)$ **est intégrable sur** $]0,+\infty[$**.**

**On pose alors :** $\forall\, x \in ]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$**.**

2. **Pour tout** $x \in ]0,+\infty[$**, exprimer** $\Gamma(x+1)$ **en fonction de** $\Gamma(x)$**.**
3. **Démontrer que** $\Gamma$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $]0,+\infty[$ **et exprimer** $\Gamma'(x)$ **sous forme d'intégrale.**

---

1. Soit $x>0$. La fonction $t \longmapsto f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0,+\infty[$, positive.
   - Intégrabilité sur $[1,+\infty[$ : par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann.
   - Intégrabilité sur $]0,1]$ : $\mathrm{e}^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Or (Riemann encore, mais pas au même endroit), $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-x<1$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_*^+.}$
2. Par intégration par parties, si $0<\varepsilon<A$,
$$\int_\varepsilon^A \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-t}\frac{t^x}{x}\right]_{t=\varepsilon}^{t=A} + \frac{1}{x}\int_a^A \mathrm{e}^{-t}t^x\,\mathrm{d}t$$
   Mais, par croissances comparées,
$$\mathrm{e}^{-A}\frac{A^x}{x} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$
   et de plus
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{\varepsilon^x}{x} \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$
   On en déduit, en prenant les limites quand $\varepsilon \to 0$ et $A \to +\infty$,
$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$
   C'est-à-dire $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$
3. **H1** Pour tout $t \in ]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ avec
$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \longmapsto \ln(t) f(x,t).$$
   **H2** Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par 1.

   **H3** Pour tout $x>0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

   **H4 Domination :** Soit $K=[a,b]$ avec $0<a<b$. On a
$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[ \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t) = \begin{cases} |\ln t|\,\mathrm{e}^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \leqslant 1 \\ |\ln t|\,\mathrm{e}^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1 \end{cases}$$
   avec $\phi$ positive, continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,1]$ car $\phi(t) = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1-a<\alpha<1$ et sur $[1,+\infty[$, car $\phi(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   Par théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres, $\boxed{\Gamma \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_*^+)}$ et $\boxed{\Gamma' : (x,t) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t) f(x,t)\,\mathrm{d}t.}$

**Exercice 30 : Analyse**

1. **Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.**
2. **Démontrer que la fonction** $f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ **est de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$.
3. (a) **Trouver une équation différentielle linéaire** $(E)$ **d'ordre** $1$ **dont** $f$ **est solution.**
   (b) **Résoudre** $(E)$.

---

Pour gagner du temps, il est conseillé de traiter les deux premières questions simultanément !

1. Soit $I$ et $J$ des intervalles réels et $g : \begin{vmatrix} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{vmatrix}$

   On suppose

   **H1** $\forall t \in I,\ \ x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$.

   **H2** $\forall x \in J,\ \ t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $I$.

   **H3** $\forall x \in J,\ \ t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ continue par morceaux sur $I$.

   **H4 Domination globale ou sur tout segment de** $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ : Éventuellement sur tout segment $S$, il existe une fonction $\phi$ continue par morceaux, positive, intégrable sur $I$ telle que

   $$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I,\quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

   Alors

   **C1** $f : x \mapsto \int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $J$

   **C2** $\forall x \in J,\ \ t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $I$ et $f'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

2. On pose $g : \begin{vmatrix} \mathbb{R}\times[0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt) \end{vmatrix}$.

   **H1** $\forall t \in [0,+\infty],\ x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par opérations et

   $$\frac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$

   **H2** $\forall x \in \mathbb{R},\ t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ |u(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc, $t \longmapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$.

   **H3** $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

   **H4** $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2} = \phi(t)$ avec $\phi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.

   En effet, par croissances comparées, $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Par comparaison à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$, $\phi$ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Donc, par théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\mathrm{d}t.$$

3. (a) On a, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Procédons à une intégration par parties. Soit $A \geqslant 0$.

   $$\int_0^A -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$

   En passant à la limite quand $A \to +\infty$, on obtient $f'(x) + \dfrac{x}{2}f(x) = 0$.

   Donc $f$ est solution de l'équation différentielle $\boxed{(L) : y' + \dfrac{x}{2}y = 0.}$

   (b) Les solutions de $(L)$ sont les fonctions $\boxed{x \mapsto A\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \text{ avec } A \in \mathbb{R}.}$

**Exercice 31**

CC BY NC SA

**Exercice 32 : Analyse**

**Soit l'équation différentielle :** $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. **Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle** $]-r,r[$ **de** $\mathbb{R}$**, avec** $r>0$.
   **Déterminer la somme des séries entières obtenues.**
2. **Est-ce que toutes les solutions de** $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ **sur** $]0,1[$ **sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur** $]-1,1[$ **?**

---

1. **Analyse** Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme $S$. Pour tout $x\in]-R,R[$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$

Donc

$$x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\Big)x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction $S$ est solution sur $]-R,R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0.$$

C'est-à-dire $\forall n\in\mathbb{N}$, $na_{n+1}=(n+1)a_n$, ce qui revient à

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=na_1.$$

**Synthèse** Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions

$$\boxed{x\mapsto a_1\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n=a_1x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{a_1x}{(1-x)^2}}$$

définies sur $]-1,1[$ avec $a_1\in\mathbb{R}$, et même sur $\mathbb{R}$ si $a_1=0$.

2. Notons $(L)$ l'équation $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   Prouvons que $\boxed{\text{les solutions de } (L) \text{ sur } ]0,1[ \text{ ne sont pas toutes développables en série entière sur } ]-1,1[.}$
   En effet, si toutes les solutions de $(L)$ sur $]0,1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de $(L)$ sur $]0,1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où $f:x\mapsto\dfrac{x}{(1-x)^2}$.
   Or, comme les fonctions $x\longmapsto x(x-1)$, $x\longmapsto 3x$ et $x\longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et comme la fonction $x\longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de $(L)$ sur $]0,1[$ est un plan vectoriel, ce qui est contradictoire.

**Exercice 33**

### Exercice 34

**Exercice 35**

CC BY NC SA


**Exercice 36**

**Exercice 37**

CC BY NC SA


**Exercice 38**

**Exercice 39**

**Exercice 40**

## Exercice 41

## Exercice 42

**Exercice 43**

**Exercice 44**

**Exercice 45**

**Exercice 46**

**Exercice 47 : Analyse**

**Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.**

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ **avec** $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

---

1. La série entière étant lacunaire, on utilise le critère de d'Alembert général. Pour tout réel $x$, on pose $u_n(x) = \dfrac{3^n x^{2n}}{n}$. Pour $x$ non nul,
$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{3nx^2}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|3x^2\right|$$
Donc, si $\left|3x^2\right| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument et si $\left|3x^2\right| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge. On en déduit que $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
On pose $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.
Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a $\forall t \in ]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.
Ainsi $\boxed{\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[,\ S(x) = -\ln\left(1-3x^2\right).}$
2. **Le corrigé officiel est particulièrement imprécis sur cet exemple.**
Posons les suites $(b_n)$ et $(c_n)$ telles que $b_n = a_{2p}$ si $n = 2p$ et $0$ sinon, et $c_n = a_{2p+1}$ si $n = 2p+1$ et $0$ sinon. Alors les séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont même rayon de convergence que $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ respectivement. Or
   - $\sum 4^n x^{2n} = \sum \left(4x^2\right)^n$ converge si et seulement si $\left|4x^2\right| < 1$ si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{2}$ : son rayon de convergence est $R_1 = \dfrac{1}{2}$.
   - $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = \sum \left(5x^2\right)^n$ converge si et seulement si $\left|5x^2\right| < 1$ si et seulement si $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ : son rayon de convergence est $R_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   Finalement, $\sum a_n x^n$ est la somme des séries entières $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ qui ont des rayons de convergence $R_1 \neq R_2$ donc celui de $\sum a_n x^n$ vaut $\boxed{R = \min(R_1, R_2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.}$
   *Autre argument possible avec la sommabilité* : les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux si et seulement si c'est le cas de $\sum a_n x^n$ : c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquets avec $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \sqcup (2\mathbb{N}+1)$). On en déduit que $R = \min(R_1, R_2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   *Autre argument possible sans la sommabilité* : $a_{2n} x^{2n} \to 0$ et $a_{2n+1} x^{2n+1} \to 0$ si et seulement si $a_n x^n \to 0$.
   D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles ou en utilisant une somme de séries entières)
$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[,\ S(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(4x^2\right)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(5x^2\right)^n = \boxed{\frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.}$$

**Exercice 48 : Analyse**

**$\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.**

**Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.**

1. **Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.**
2. **Soit $(P_n)$ une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers $f$.**
   **(a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers $f^2$.**
   **(b) Démontrer que $\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$.**
   **(c) Calculer $\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.**
3. **En déduire que $f$ est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.**

---

1. Toute fonction $f$ continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
2. On pose, pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, fonction continue sur un segment donc bornée, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
   (a) $f$ et $P_n - f$ étant continues sur le segment $[0,1]$ donc bornées,
   $$\forall t \in [0,1],\ \left|P_n(t)f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)||P_n(t) - f(t)| \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty.$$
   On en déduit que
   $$\left\|P_n f - f^2\right\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|P_n - f\|_\infty \tag{1}$$
   Or $(P_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$ donc $\|P_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc, d'après $(1)$, $\|P_n f - f^2\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc $\boxed{(P_n f) \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f^2.}$
   (b) **H1** $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n f$ est continue sur $[0,1]$.
   **H2** D'après la question précédente, $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers $f^2$.
   Donc, d'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues,
   $$\boxed{\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$
   (c) $P \mapsto \int_0^1 P(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ et $P \mapsto 0$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ donc elles sont égales. Ainsi, $\boxed{\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$
3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or $f^2$ est positive et continue sur $[0,1]$, donc $f^2$ est nulle sur $[0,1]$ et donc $\boxed{f \text{ est nulle sur } [0,1].}$

**Exercice 49 : Analyse**

**Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.**

**On pose :** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,+\infty[, f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. **(a) Justifier que la suite $(a_n)$ est bornée.**

   **(b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.**

   **On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.**

2. **(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.**

   **En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.**

   **(b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.**

---

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge vers $e^x$.

   (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement ; donc la suite $(a_n)$ converge vers 0 et donc $\boxed{\text{elle est bornée.}}$

   **Autre méthode :** On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant M = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

   (b) Soit $t \in [0,+\infty[$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leqslant M \dfrac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.

   On a donc vérifié la $\boxed{\text{convergence simple de } \sum f_n \text{ sur } [0,+\infty[.}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $g_n$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $t^2 g_n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $g_n$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc sur $[0,+\infty[$.

   On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En effectuant une intégration par parties, on prouve que $I_n = nI_{n-1}$. On en déduit par récurrence que $I_n = n!I_0 = n!$. Alors $\boxed{t \mapsto |f_n(t)| \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$ car $|f_n(t)| = \dfrac{|a_n|}{n!} g_n(t)$ et on a $\boxed{\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = |a_n|.}$

   (b) **H1** $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et a pour somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b) dont on a admis la continuité sur $[0,+\infty[$.

   **H2** $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la question 2.(a)

   **H3** $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = |a_n|$ terme général de série convergente par hypothèse.

   Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions, $f$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\right) \mathrm{d}t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} n! = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.}$$

**Exercice 50 : Analyse**

**On considère la fonction** $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. **Prouver que** $F$ **est définie et continue sur** $]0;+\infty[$.
2. **Prouver que** $x \longmapsto xF(x)$ **admet une limite en** $+\infty$ **et déterminer la valeur de cette limite.**
3. **Déterminer un équivalent, au voisinage de** $+\infty$**, de** $F(x)$.

---

1. Notons $f : \left| \begin{array}{ccc} ]0;+\infty[\times[0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t} \end{array} \right.$

   **H1** $\forall t \in [0;+\infty[$, $x \mapsto f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

   **H2** $\forall x \in ]0;+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.

   **H3** Soit $[a,b]$ un segment de $]0;+\infty[$. $\forall x \in [a,b]$, $\forall t \in [0;+\infty[$,

$$\left|f(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-2t} = \varphi(t)$$

   avec $\varphi$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$ car $2>0$.

   On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } ]0;+\infty[.}$$

2. $\forall x \in ]0;+\infty[$, $xF(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

   Posons $\forall x \in ]0;+\infty[$, $\forall t \in [0;+\infty[$, $h_x(t) = \frac{x}{x+t}\mathrm{e}^{-2t}$.

   **H1** $\forall t \in [0;+\infty[$, $h_x(t) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-2t} = h(t)$.

   **H2** Toutes les fonctions $h_x$ et la fonction $h$ sont continues par morceaux sur $[0;+\infty[$.

   **H3** $\forall x \in ]0;+\infty[$, $\forall t \in [0;+\infty[$, $|h_x(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-2t} = h(t)$ et $h$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.

   Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,

$$\int_0^{+\infty} h_x(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

   Conclusion : $\boxed{xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}.}$

3. Et donc $\boxed{F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}.}$

---

**Autre méthode :** le CV $u = x+t$ donne $F(x) = \mathrm{e}^{2x}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}\mathrm{d}u$ ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2u}}{u}$ valant $u \mapsto -\dfrac{2u+1}{u^2}\mathrm{e}^{-2u}$, on « remarque » que

$$\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u},$$

donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim \mathrm{e}^{2x}\int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2}\mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2x}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-2u}}{2u}\right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

Ou alors on effectue une IPP et on utilise un théorème d'intégration de $\mathrm{o}$ dans le cas de convergence.

D'où en particulier $xF(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

**Exercice 51 : Analyse**

1. **Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.**

   **On se propose de calculer la somme de cette série.**

2. **Donner le développement en série entière en $0$ de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.**

   **Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.**

3. **En déduire le développement en série entière en $0$ de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.**

4. **En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.**

---

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} > 0$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4}$$

   Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1$. Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en $0$ et le rayon de convergence $R$ de son développement en série entière vaut $1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall u \in ]-1,1[,\ (1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} u^n.$$

   En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$, $R = 1$ et $\forall t \in ]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n.$$

   En multipliant numérateur et dénominateur par $2\cdot4\cdots2n = 2^n n!$, on obtient

$$\forall t \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

   Conclusion : $\boxed{R = 1 \text{ et } \forall t \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n.}$

3. D'après la question précédente, en remarquant que $x \in ]-1,1[ \iff t = x^2 \in [0,1[$ et $[0,1[ \subset ]-1,1[$, il vient

$$\forall x \in ]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

   avec un rayon de convergence $R = 1$.

   Or $\operatorname{Arcsin}$ est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\operatorname{Arcsin}' : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé. On obtient

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ \operatorname{Arcsin} x = \underbrace{\operatorname{Arcsin} 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}}$$

   avec un $\boxed{\text{rayon de convergence } R = 1.}$

4. Prenons $x = \frac{1}{2} \in ]-1,1[$ dans le développement précédent. On en déduit que

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}.$$

   Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)} = \frac{\pi}{3}.}$

**Exercice 52 : Probabilités – CCINP 95**

**Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.**

1. **Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.**
   **Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.**
   **On note $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.**
   **On note $Y$ le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.**
   (a) **Déterminer la loi de $X$, son espérance et sa variance.**
   (b) **Déterminer la loi de $Y$, son espérance et sa variance.**
2. **Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément 5 boules dans l'urne.**
   (a) **Déterminer la loi de $X$.**
   (b) **Déterminer la loi de $Y$.**

---

1. (a) Il s'agit d'une répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre $p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours, $\boxed{X \sim \mathcal{B}(5,p),\ \mathbb{E}(X) = 5p = 1 \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{4}{5}.}$

   (b) $Y = 2X - 3(5-X) = 5X - 15$. Donc $\boxed{Y(\Omega) = \{5k-15, k \in [\![0,5]\!]\}}$ et, si $k \in [\![0,5]\!]$,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y = 5k-15) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\frac{4^{5-k}}{5^5}.}$$

   De plus, par linéarité, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15 = -10}$ et $\boxed{\mathbb{V}(Y) = 5^2\mathbb{V}(X) = 20.}$

2. (a) $\boxed{X(\Omega) = [\![0,2]\!]}$ et en prenant comme modèle $\Omega = \mathscr{P}_5(\mathscr{B})$ (parties à 5 éléments) où $\mathscr{B}$ est l'ensemble des boules, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ uniforme, avec $|\Omega| = \binom{10}{5} = \frac{10!}{(5!)^2}$ :

   - $(X = 0)$ est le cas où il n'y a que des boules noires (5 parmi 8) donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{5!\cdot 8!}{3!\cdot 10!} = \frac{4\cdot 5}{9\cdot 10} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

   - $(X = 1)$ est le cas où il n'y a qu'une seule boule blanche parmi 2 et 4 boules noires parmi 8 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{2\cdot\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{2\cdot(5!)^2\cdot 8!}{(4!)^2\cdot 10!} = \frac{2\cdot 25}{9\cdot 10} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

   - $(X = 2)$ est le cas où il n'y a les deux boules blanches, il n'y a donc à choisir que 3 boules noires parmi 8 donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2)} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \mathbb{P}(X=0) = \boxed{\frac{2}{9}}$$

   ou alors $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$.

   (b) On a toujours $Y = 5X - 15$. Donc $\boxed{Y(\Omega) = \{-15,-10,-5\}}$ et

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=-15) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{2}{9}\,;} \qquad \boxed{\mathbb{P}(Y=-10) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{5}{9}\,;} \qquad \boxed{\mathbb{P}(Y=-5) = \mathbb{P}(X=2) = \frac{2}{9}.}$$

**Exercice 53 : Probabilités – CCINP 98**

**Un secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers $n$ correspondants distincts.**

**On admet que les $n$ appels constituent $n$ expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est $p$ (où $p \in ]0,1[$).**

**Soit $X$ la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.**

1. **Donner la loi de $X$. Justifier.**
2. **Le secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note $Y$ la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.**
   - **(a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k \mid X=i)$.**
   - **(b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.**

     ***Indication*** **: on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.**
   - **(c) Déterminer l'espérance et la variance de $Z$.**

---

1. Il s'agit d'une répétition de $n$ expériences de Bernoulli de même paramètre $p$ indépendantes dont on cherche le nombre de succès. D'après le cours, $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p).}$
2. (a) En supposant l'événement $(X=i)$ réalisé, on se retrouve de nouveau dans une situation de nombre de succès de $n-i$ expériences de Bernoulli de même paramètre $p$ indépendantes. Donc, pour la probabilité conditionnelle $P_{(X=i)}$, $Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n-i,p)$.

   Ainsi, $\boxed{\text{pour } k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=k \mid X=i) = \binom{n-i}{k} p^k (1-p)^{n-i-k}}$ (qui est nul si $k > n-i$).

   (b) $Z$ correspondant au nombre total de correspondant ayant répondu, $\boxed{Z(\Omega) = [\![0,n]\!].}$ Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

   En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((X=i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ associé à $X$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Z=k \mid X=i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i \mid X=i) && \text{On a } 0 \leqslant X \leqslant k \text{ et } Y = Z-X.\\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-i-k} && \text{Formule admise.}\\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{1-p}\right)^i \cdot 1^{k-i} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} \left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k && \text{Binôme de Newton.}\\
&= \binom{n}{k} (p(2-p))^k \left((1-p)^2\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

   avec $p(2-p)+(1-p)^2 = 1$. Donc $\boxed{Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p)).}$

   (c) D'après le cours, $\boxed{\mathbb{E}(X) = np(2-p)}$ et $\boxed{\mathbb{V}(X) = np(2-p)(1-p)^2.}$

CC BY NC SA

**Exercice 54 : Probabilités – CCINP 101**

**Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau $A$, $B$ et $C$.**
**À l'instant $t=0$, il se trouve au point $A$.**
**Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.**
**L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.**

**Soit $n \in \mathbb{N}$.**
**On note $A_n$ l'événement «l'animal est en $A$ après son $n^e$ trajet».**
**On note $B_n$ l'événement «l'animal est en $B$ après son $n^e$ trajet».**
**On note $C_n$ l'événement «l'animal est en $C$ après son $n^e$ trajet».**

**On pose $\mathbb{P}(A_n)=a_n$, $\mathbb{P}(B_n)=b_n$ et $\mathbb{P}(C_n)=c_n$.**

1. **(a) Exprimer, en le justifiant, $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.**
   **(b) Exprimer, de même, $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $a_n$, $b_n$ et $c_n$.**
2. **On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$.**
   **(a) Justifier, sans calcul, que la matrice $A$ est diagonalisable.**
   **(b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de $A$ et déterminer le sous-espace propre associé.**
   **(c) Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D=P^{-1}AP$.**
   **Remarque : le calcul de $P^{-1}$ n'est pas demandé.**
3. **Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.**
   **Remarque : aucune expression finalisée de $a_n$, $b_n$ et $c_n$ n'est demandée.**

---

1. (a) $(A_n,B_n,C_n)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_{n+1})=\mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n)+\mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n)+\mathbb{P}(A_{n+1}|C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

   donc $a_{n+1}=0a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n$ c'est-à-dire $\boxed{a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n.}$

   (b) De même, $\boxed{b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n}$ et $\boxed{c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n.}$

2. (a) $A$ est symétrique à coefficients réels, donc $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$

   (b) $\operatorname{rg}\left(A+\frac{1}{2}I_3\right)=\operatorname{rg}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\right)=1$, donc $\boxed{-\frac{1}{2}\text{ est valeur propre de }A}$ et $\dim E_{-\frac{1}{2}}(A)=2$.

   Comme dans cette matrice, les colonnes vérifient $C_1-C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $C_2-C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\in E_{-\frac{1}{2}}(A)$ et sont indépendant donc $\boxed{E_{-\frac{1}{2}}(A)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right).}$

   *Remarque : On peut aussi résoudre le système* $\left(A-\frac{1}{2}I_3\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff x+y+z=0\iff z=-x-y.$

   (c) Puisque $-\frac{1}{2}$ et valeur propre double de $A$ et $\operatorname{tr}(A)=0$, on en déduit que $1$ est une valeur propre simple de $A$. Or $A-I_3=\begin{pmatrix}-1&1/2&1/2\\1/2&-1&1/2\\1/2&1/2&-1\end{pmatrix}$ vérifie $C_1+C_2+C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\in E_1(A)$.

   *On aurait aussi pu voir directement sur $A$ que $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ce qui donne directement la valeur propre $1$ et un vecteur propre associé.*

   Ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base diagonalisante de $A$ : on pose $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\text{ et }D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix},}$ et on a alors $D=P^{-1}AP$.

3. D'après la question 1., pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$ et donc, par récurrence (suite géométrique),

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-1/2)^n&0\\0&0&(-1/2)^n\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$$

**Exercice 55 : Probabilités – CCINP 105**

1. **Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.**
2. **On dispose de $100$ dés dont $25$ sont pipés (c'est-à-dire truqués).**
   **Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre $6$ lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.**
   (a) **On tire un dé au hasard parmi les $100$ dés.**
   **On lance ce dé et on obtient le chiffre $6$. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?**
   (b) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés.**
   **On lance ce dé $n$ fois et on obtient $n$ fois le chiffre $6$.**
   **Quelle est la probabilité $p_n$ que ce dé soit pipé ?**
   (c) **Déterminer la limite de $(p_n)$. Interpréter ce résultat.**

---

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
   Si $B$ est un événement non négligeable et si $(A_i)_{i\in I}$ (où $I$ est fini ou dénombrable) est un système complet ou quasi-complet d'événements non négligeables, on a

$$\boxed{\forall i \in I, \quad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.}$$

   **Preuve** : Soit $i \in I$.

$$\mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

   en appliquant au dénominateur la formule des probabilités totales avec le système complet ou quasi-complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$.

2. (a) Notons $T$ l'événement « le dé choisi est pipé » et $A$ l'événement « On obtient le chiffre 6 lors du lancer ».
   On demande de calculer $\mathbb{P}(T \mid A)$.
   Le système $\left(T, \overline{T}\right)$ est un système complet d'événements non négligeables, avec $\mathbb{P}(T) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ et donc $\mathbb{P}\left(\overline{T}\right) = \frac{3}{4}$. Alors, d'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}(T \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid T)\mathbb{P}(T)}{P(A \mid T)P(T) + \mathbb{P}\left(A \mid \overline{T}\right)\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

   donc $\boxed{\mathbb{P}(T \mid A) = \frac{1}{2}.}$

   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $A_k$ l'événement « on obtient le chiffre 6 au $k^{\text{e}}$ lancer » et on pose $B = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.
   On cherche à calculer $p_n = \mathbb{P}(T \mid B)$.
   Toujours avec le système complet d'événements $\left(T, \overline{T}\right)$, d'après la formule de Bayes,

$$p_n = \mathbb{P}(T \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid T)\mathbb{P}(T)}{P(B \mid T)P(T) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{T}\right)\mathbb{P}\left(\overline{T}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ p_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.}$

   (c) Donc $\boxed{p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$ Cela signifie que, lorsqu'on effectue un nombre élevé de lancers, si on n'obtient que des 6 sur ces lancers alors il y a de très fortes chances que le dé tiré au hasard au départ soit pipé.

**Exercice 56 : Probabilités – CCINP 107**

**On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.**

- **L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires.**
- **L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.**

**On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :**

- **On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.**
- **On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.**
- **Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$.**
- **Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.**

**Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n^{e}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.**

1. **Calculer $p_1$.**
2. **Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.**
3. **En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $p_n$.**

---

1. Notons $A$ l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne $U_1$ ».
Alors $\overline{A}$ est l'événement « le premier tirage se fait dans l'urne $U_2$ ».
$\left(A, \overline{A}\right)$ est un système complet d'événements, donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B_1|\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}.$$

On a donc $\boxed{p_1 = \frac{17}{35}.}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\left(B_n, \overline{B_n}\right)$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}\left(B_{n+1}|\overline{B_n}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_n}\right) = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n).$$

Donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.}$

3. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On cherche une solution particulière constante

$$c = -\frac{6}{35}c + \frac{4}{7} \iff c = \frac{20}{41}.$$

Les solutions de l'équation homogène associée $u_{n+1} = -\frac{6}{35}u_n$ sont les suites géométrique de raison $-\frac{6}{35}$.

On a donc une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad p_n = \lambda\left(-\frac{6}{35}\right)^n + \frac{20}{41}.}$

*Remarque : si on ne reconnaît pas une équation linéaire (ou plutôt affine), on peut poser $(u_n)_n = \left(p_n - c\right)_n$ et vérifier que c'est une suite géométrique.*

Or $p_1 = \frac{17}{35} = -\frac{6\lambda}{35} + \frac{20}{41}$ donc $\boxed{\lambda = -\frac{35}{6}\left(\frac{17}{35} - \frac{20}{41}\right) = \frac{1}{82}}$

**Exercice 57 : Probabilités – CCINP 109**

**Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches numérotées de 1 à $n$ et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.**
**On note $X$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.**
**On note $Y$ la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.**

1. **Déterminer la loi de $X$.**
2. **Déterminer la loi de $Y$.**

---

1. On a $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$ car il n'y a que deux boules noires. Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des $n+2$ boules.

   **Première méthode** On peut n'observer que les deux premiers tirages pour conclure. L'univers $\Omega = \mathscr{A}_2(\mathscr{B})$ est l'ensemble des 2-arrangements (couples de 2 éléments distincts) des $n+2$ boules, de cardinal $(n+2)(n+1)$, la tribu est toujours $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme.

   - $\boxed{\mathbb{P}(X=1) = \dfrac{|(X=1)|}{|\Omega|} = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{n}{n+2}}$ car dans un couple de $(X=1)$, il faut placer l'une des $n$ boules blanches, l'une des $n+1$ autres boules ensuite.
   - $\boxed{\mathbb{P}(X=2) = \dfrac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \dfrac{2n}{(n+2)(n+1)}}$ car dans un couple de $(X=2)$, il faut placer l'une des 2 boules noires, puis l'une des $n$ boules blanches.
   - $\boxed{\mathbb{P}(X=3) = \dfrac{|(X=2)|}{|\Omega|} = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}}$ car dans un couple de $(X=3)$, il faut placer l'une des 2 boules noires d'abord puis la deuxième (pour laquelle il n'y a plus de choix).

   **Deuxième méthode** On note $B_j$ l'événement « Tirer une boule blanche au $j^{\text{e}}$ tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, (on tire respectivement 0, 1 ou 2 noires puis une blanche)

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=1)} = \mathbb{P}(B_1) = \boxed{\frac{n}{n+2}} \qquad \boxed{\mathbb{P}(X=2)} = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(B_2 \,\middle|\, \overline{B_1}\right) = \boxed{\frac{2}{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(X=3)} = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{B_2} \,\middle|\, \overline{B_1}\right) = \boxed{\frac{2}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1}}$$

   **Troisième méthode** On observe tout le tirage : $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$ de cardinal $(n+2)!$, un tirage est une permutation des $n+2$ boules. La tribu est $\mathscr{P}(\Omega)$ (univers au plus dénombrable) et la probabilité est uniforme vu la description de l'expérience.

   - Une permutation de $(X=1)$ est une permutation commençant par une des $n$ boules blanches, puis permutant les $n+1$ autres ensuite. On trouve $|(X=1)| = n(n+1)!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=1)$.
   - Une permutation de $(X=2)$ est une permutation commençant par une des 2 boules noires, puis une des $n$ boules blanches, puis permutant les $n$ autres ensuite. On trouve $|(X=2)| = 2 \cdot n \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=2)$.
   - Une permutation de $(X=3)$ permute d'abord les 2 boules noires, puis permute les $n$ boules blanches. On trouve $|(X=3)| = 2! \cdot n!$ et on retrouve $\mathbb{P}(X=3)$.

   **Vérification** On calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(Y=k) = 1$. On peut aussi toujours déduire l'une des probabilités des autres.

2. On a $Y(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ car au mieux on a une boule $n^\circ$ 1 au premier tirage, au pire, les deux boules $n^\circ$ 1 sont tirées à la fin.

   **Première méthode** On peut n'observer que les positions des boules $n^\circ$ 1, sans ordre. L'univers est l'ensemble $\Omega = \mathscr{P}_2([\![1, n+2]\!])$ des paires d'indices, de cardinal $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, la tribu est toujours $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité est toujours uniforme. Dans une paire de $(Y=k)$, on a $k$ et un autre entier entre $k+1$ et $n+2$.

   On obtient $\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \dfrac{n+2-(k+1)+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \boxed{\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}$.

   **Deuxième méthode** On note $A_j$ l'événement « Tirer une boule qui ne porte pas le $n^\circ$ 1 au $j^{\text{e}}$ tirage ». Alors, avec la formule des probabilité composées, en regardant l'état de l'urne à chaque tirage,

   $$\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \prod_{j=1}^{k-2} \mathbb{P}\left(A_{j+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{j} A_i\right) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{A_k} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \prod_{j=0}^{k-2} \frac{n-j}{n+2-j} \cdot \frac{2}{n+3-k} = 2 \cdot \frac{n!}{(n+1-k)!} \cdot \frac{(n+2-k)!}{(n+2)!} = \boxed{\frac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}$$

   **Troisième méthode** On peut reprendre l'univers $\Omega = \mathfrak{S}_{n+2}$. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$ d'observation de tous les tirages. Pour décrie une permutation de $(Y=k)$, il faut choisir d'abord $k-1$ des $n$ boules ne portant pas le $n^\circ$ 1, les permuter, puis une de 2 boules $n^\circ$ 1 puis permuter les $n+2-k$ boules restantes.

   On obtient $\boxed{\mathbb{P}(Y=k)} = \dfrac{\binom{n}{k-1}(k-1)! \cdot 2 \cdot (n+2-k)!}{(n+2)!} = \dfrac{2n!(n+2-k)!}{(n-k+1)!(n+2)!} = \boxed{\dfrac{2(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}}$.

   **Vérification** On calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(Y=k) = 1$ avec le changement d'indice $j = n+2-k$.