

Savoir-faire et thèmes classiques – Espaces préhilbertiens réels – MP2I

Savoir-faire

- Définir un produit scalaire, un espace préhilbertien réel, un espace euclidien, la norme euclidienne associée et les produits scalaires et normes euclidiennes particulières du programme
- Utiliser des identités remarquables et de polarisation
- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (y compris pour une forme bilinéaire symétrique positive) et son cas d'égalité (dans le cas défini-positif seulement)
- Manipuler des familles orthogonales ou orthonormales, l'orthogonal d'un sous-espace
- Utiliser le théorème de Pythagore
- Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
- Exprimer les coordonnées, produit scalaire, norme, distance euclidiennes en base orthonormale sous forme de somme ou sous forme matricielle
- Écrire une formule de changement de base orthonormales
- Savoir que l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie est aussi un supplémentaire (le seul qui soit aussi orthogonal) et les propriétés qui en découlent
- Connaître les propriétés des projections et symétries orthogonales, exprimer la projection sur un sous-espace dont on connaît une base orthonormale, exprimer en particulier la projection orthogonale sur une droite et sur un hyperplan et les symétries correspondantes (retournement et réflexion)

- Déterminer la distance à un sous-espace de dimension finie, l'exprimer de plusieurs manières, connaître le cas particulier de la distance à un hyperplan
- Énoncer le théorème de représentation (des formes linéaires) de Riesz

Thèmes Classiques

- Espace préhilbertien $L^2(I)$ des fonctions réelles de carré intégrable sur I , espace préhilbertien ℓ^2 des suites réelles de carré sommable
- Familles de polynômes orthogonaux (exemples : polynômes de Tchebychev, polynômes de Legendre, polynômes de Hermite...)
- Méthode de Gauß de calcul approché d'intégrales
- Déterminant de Gram