1 ENS

Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

Solution de 1 : ENS

FGN 3 4.18

Soit G sous-groupe fini du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ de cardinal n.

Alors pour tout $g \in G$, $g^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

De plus, g est strictement monotone.

Si g est strictement croissante, on montre classiquement que $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Si on a $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) < x$, alors pour tout k, $g^k(x) < x$ et pour $k = n$, $x < x$ ce qui est contradictoire. Si $g(x) > x$ on aboutit de même à une contradiction. C'est donc que pour tout réel x, $g(x) = x$ donc $g = \mathrm{id}_E$.

Si g est strictement décroissante, alors g^2 est un homéomorphisme strictement croissant donc $g^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$: g est d'ordre 2.

De même, si f et g sont strictement décroissants, $f \circ g$ est strictement croissant donc $f \circ g = \mathrm{id}_E$ et $f = g^{-1}$.

Finalement, les sous groupes fini du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ de cardinal n sont exactement

$$\boxed{\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\} \text{ et } \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, g\} \text{ où } g \text{ est une involution strictement décroissante continue.}}$$

2 X-ENS : problèmes de points fixes

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $[0,1] \subset f([0,1])$ ou $f([0,1]) \subset [0,1]$, alors f a un point fixe dans $[0,1]$.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.
3. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Montrer que f a un point fixe.
4. Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.
5. On garde les mêmes hypothèses et on suppose de plus f monotone. Montrer que f et g ont un point fixe commun.

Solution de 2 : X-ENS : problèmes de points fixes

FGN 3 4.12

1. Appliquer le TVI à $g : x \mapsto f(x) - x$.
2. D'après la question précédente, l'ensemble P des points fixes est non vide. On montre que P est un intervalle car il est convexe. En effet, si $a, b \in P$ avec $a < b$ et $x \in [a,b]$, $\left|f(x) - a\right| = \left|f(x) - f(a)\right| \leqslant x - a$ donc $f(x) \leqslant x - a + a = x$. De même, avec b, on obtient $f(x) \geqslant x$ donc $f(x) = x$ et $x \in P$. Donc P est un intervalle.
   Enfin,
3. Considérer $\alpha = \inf A$ où $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x\}$. Montrer que $f(\alpha)$ minore A donc $f(\alpha) \leqslant \alpha$, puis, par croissance de f, $f(\alpha) \in A$ donc $\alpha \leqslant f(\alpha)$.
4. Nous proposons deux solutions de cette question.
   - Supposons par l'absurde que $g - f$ ne s'annule pas et par exemple qu'elle est strictement positive sur $[0,1]$. Continue, elle atteint son minimum sur le compact $[0,1]$ et il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $g(x) - f(x) \geqslant \varepsilon$, pour tout $x \in [0,1]$. On a alors pour tout $x \in [0,1]$,
     $$g^2(x) = g(g(x)) \geqslant f(g(x)) + \varepsilon = g(f(x)) + \varepsilon \geqslant f^2(x) + 2\varepsilon$$
     puis, par une récurrence immédiate, $g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\varepsilon$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$. C'est impossible car, si $x \in [0,1]$, les suites $\left(g^n(x)\right)_{n \geqslant 0}$ et $\left(f^n(x)\right)_{n \geqslant 0}$ sont bornées.
   - L'ensemble P des points fixes de g est non vide (question 1), borné, et stable par f car f et g commutent. En effet, si $g(x) = x$, on a $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$ et $f(x) \in P$. Soit $a = \inf P$ et $b = \sup P$. Comme P est stable par passage à la limite, a et b sont dans P. On en déduit que $g(a)$ et $g(b)$ sont dans P. Ainsi $g(a) \geqslant a = f(a)$ et $g(b) \leqslant b = f(b)$. La fonction $g - f$ est donc positive en a et négative en b. Elle s'annule.
5. On distingue alors deux cas selon la monotonie de f.
   - Si f est décroissante, alors elle admet un unique point fixe a. Comme f et g commutent, $g(a)$ est aussi un point fixe de f, donc $g(a) = a$.

- Si f est croissante, on considère l'ensemble P des points fixes de g ; il est non vide et fermé, stable par f, car f et g commutent. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathrm{P}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Cette suite est monotone (croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante sinon) et comme elle est bornée, elle converge vers un point α. Comme (u_n) est à valeurs dans P, qui est stable par passage à la limite, on a $\alpha \in P$, donc α est un point fixe de g. Et comme f est continue, on a aussi $f(\alpha) = \alpha$, en passant à la limite dans la relation de récurrence. D'où le résultat.

3 Très classique

Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|f(x)\right| \leqslant ax + b.$$

Solution de 3 : Très classique

On va traduire l'uniforme continuité avec une valeur fixée de ε et aller de 0 à x par pas de η maximum pour traduire l'uniforme continuité un certain nombre de fois et majorer $\left|f(x) - f(0)\right|$.

Soit $\eta > 0$ tel que $|x - x'| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant 1$. Alors

$$\left|f(x)\right| = \left|f(0) - f(x) - f(0)\right| = \left|\sum_{i=0}^{k-1}(f(i\eta) - f((i+1)\eta)) + f(k\eta) - f(x) - f(0)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1}\left|f(i\eta) - f((i+1)\eta)\right| + \left|f(k\eta) - f(x)\right| + \left|f(0)\right|$$

Choisissons k tel que $k\eta \leqslant x < (k+1)\eta$: $k = \left\lfloor \frac{x}{\eta} \right\rfloor$.

On obtient alors

$$|x| \leqslant k + 1 + \left|f(0)\right| \leqslant \frac{x}{\eta} + \left|f(0)\right| + 1$$

$a = \frac{1}{\eta}$ et $b = \left|f(0)\right| + 1$ conviennent.

Autre rédaction possible : puisque f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - y| \leqslant \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant 1$.

On en déduit que pour $x \in [0, \eta]$ on a

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1.$$

Puis que, pour $x \in [\eta, 2\eta]$, on a

$$|f(x)| \leqslant |f(\eta)| + 1 \leqslant |f(0)| + 2.$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + n + 1$$

sur l'intervalle $[n\eta, (n+1)\eta]$. Sur cet intervalle on peut majorer n par $\frac{x}{\eta}$.

On a donc prouvé que pour tout $x \geqslant 0$,

$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + 1 + \frac{x}{\eta}$$

4 X-ENS : théorème de Césaro continu

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer, en commençant par traiter le cas $\ell = 0$, que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Solution de 4 : X-ENS : théorème de Césaro continu

FGN 3 4.7

Il s'agit d'une version continue du théorème de Cesàro. Supposons d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on peut trouver A tel que $|f(x+1) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$. La fonction f étant continue sur le segment $[A, A+1]$, elle y est bornée : soit M tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [A, A+1]$.

Soit $x \in [A+1, A+2]$. On a $|f(x) - f(x-1)| \leqslant \varepsilon$ donc

$$|f(x)| \leqslant |f(x-1)| + \varepsilon \leqslant M + \varepsilon$$

Donc sur l'intervalle $[A+1, A+2]$ on a $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}+\varepsilon$. On démontre plus généralement, par une récurrence évidente, que, pour tout entier naturel p, si $x \in [A+p, A+p+1]$, alors on a

$$|f(x)| \leqslant M + p\varepsilon \leqslant M + (x-A)\varepsilon$$

On a donc pour tout $x \geqslant A$,

$$\frac{|f(x)|}{x} \leqslant \frac{M}{x} + \frac{x-A}{x}\varepsilon \leqslant \frac{\mathrm{M}}{x} + \varepsilon$$

Comme $\frac{M}{x}$ tend vers 0 , on peut trouver $B > A$ tel que $\frac{M}{x} \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant B$. On a alors pour tout $x \geqslant \mathrm{B}$, $\frac{|f(x)|}{x} \leqslant 2\varepsilon$ ce qui prouve que $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0.

Dans le cas général, on peut poser $g(x) = f(x) - \ell x$ pour se ramener au cas précédent.

5 Oraux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propriétés suivantes :

(i) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$;

(ii) f admet une limite finie en $+\infty$;

(iii) $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathcal{O}}(x)$

Solution de 5 : Oraux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

FGN 3 4.33

- L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) est fausse puisque la fonction $x \mapsto x$ est uniformément continue et n'a pas de limite finie en $+\infty$.
- En revanche la réciproque (ii) $\Longrightarrow$ (i) est vraie. En effet, notons ℓ la limite finie de f en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geqslant A$.
  Si x et y sont plus grands que A, on a alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Choisissons alors $\eta > 0$ un ε-module de continuité uniforme pour f sur le segment $[0, A]$ qui est compact (théorème de Heine). Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Si x et y sont dans $[0, A]$ ou dans $[A, +\infty[$ tous les deux on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ et si $x \in [0, A]$ et $y \in [A, +\infty[$ alors
  $$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leqslant 2\varepsilon$$
  Ainsi η est un 2ε-module de continuité uniforme pour f sur $\mathbb{R}_+$.
- L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (iii) est triviale et la réciproque est fausse.
- (i) $\Longrightarrow$ (iii) est une conséquence de l'exercice 3.
- La réciproque est fausse. Par exemple la fonction bornée $x \longmapsto \sin\left(x^2\right)$ n' est pas uniformément continue : en effet, lorsqu'une fonction f est uniformément continue sur un intervalle I, pour toutes suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que $x_n - y_n \to 0$, on a $f(x_n) - f\left(y_n\right) \to 0$. En prenant $x_n = \sqrt{2\pi n}$ et $y_n = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{6}}$, on obtient que $x \longmapsto \sin\left(x^2\right)$ ne peut être uniformément continue.

6 X Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré au moins 2

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $aP' + bP$ est scindé.
2. Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, montrer que $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}$ est scindé.

Solution de 6 : X

Soient $x_1 < \ldots < x_n$ les racines de P de multiplicités $m_1, \ldots, m_n$.

Alors $x_1, \ldots, x_n$ sont racines de P' de multiplicités $m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$. De plus, le théorème de Rolle nous fournit $n-1$ autres racines de P' intercalées entre deux racines successives de P : x_k et x_{k+1}.

Cela montre classiquement que P' est scindé (on a trouvé autant de racines comptées avec multiplicité que son degré).

1. Si $a=0$, il n'y a rien à faire. Sinon, quitte à diviser par a ce qui ne change pas le caractère scindé, on montre que $P'+\alpha P$ est scindé.

   On a toujours que $x_1<\ldots<x_n$ sont racines de $P'+\alpha P$ de multiplicités au moins $m_1-1,\ldots,m_n-1$. Pour trouver d'autres racines, c'est plus délicat.

   Une idée est de reconnaître un début de dérivée de produit (comme dans la technique du facteur intégrant de résolution d'équations différentielles.)

   Soit $f: x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, dérivable, de dérivée $f': x\mapsto (P'(x)+\alpha P(x))\mathrm{e}^{\alpha x}$.

   On peut appliquer le théorème de Rolle $n-1$ fois, entre deux racines successives de P et en déduire $n-1$ nouvelles racines distinctes de $P'+\alpha P$. Si $\alpha\neq 0$, il en manque une pour en avoir autant comptées avec multiplicité que le degré de $P'+\alpha P$ qui est égal au degré de P. Plusieurs arguments possible pour conclure :

   - $P'+\alpha P$ admet nécessairement une dernière racine complexe car est scindé dans $\mathbb{C}$ et si cette dernière n'était pas réelle, son conjugué serait une autres racines différente de toutes les autres ce qui est exclus pour des raisons de degré.
   - $P'+\alpha P$ est alors divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par une polynôme de degré $\deg(P'+\alpha P)-1$. Le quotient est un polynôme réel de degré 1 qui admet une racine réelle, la racine de $P'+\alpha P$ qui nous manquait.
   - On peut appliquer une nouvelle fois le théorème de Rolle ou plutôt une de ses extensions car $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ si $\alpha<0$ et $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$ si $\alpha>0$, ce qui permet d'appliquer une dernier théorème de Rolle soit entre x_n et $+\infty$, soit entre $-\infty$ et x_1, ce qui fournit une autre racine de $P'+\alpha P$ différente de toutes celles que l'on avait déjà.

2. Pour la deuxième question, question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...

   On a
$$\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)} = [P(D)](P)$$
   Mais $P=\lambda\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc
$$[P(D)](P)=\lambda(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)(P)$$
   Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k\geqslant 1$,
$$[(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)](P)$$
   est scindé...

7 Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $|f'|\leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi: \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

Solution de 7 : Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f l'est.

8 Caractérisation des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

Soit $f: I\to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k\geqslant 1$.
Montrer que f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

9

Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.

10 Fonctions mid-convexes

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y)\in I^2$,
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y)=\left\{t\in[0,1]\mid f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\right\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$...

Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

Solution de 10 : Fonctions mid-convexes

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right)&\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)+f(y)\right)\end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\leqslant\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n\geqslant 0\ \forall k\in[\![0,2^n]\!]\ \forall(x,y)\in I^2\qquad f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)\leqslant\frac{k}{2^n}f(x)+(1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $[\![0,2^n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)+\left(\frac{k'}{2^n}x+\left(1-\frac{k'}{2^n}\right)y\right)\right)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)y\right)+f\left(\frac{k'}{2^n}x+\left(1-\frac{k'}{2^n}\right)y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n, on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\dfrac{k}{2^n}\ ;\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$ dans $[0,1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique, mais demande des notions de topologie). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x<y$ dans I et $t_0\in]0,1[$ tels que

$$f\big(t_0x+(1-t_0)y\big)>t_0f(x)+(1-t_0)f(y)$$

Par continuité de f,

$$A=\{u\in[0,t_0]\ ;\ f\big(ux+(1-u)y\big)=uf(x)+(1-u)f(y)\}$$

est un fermé relatif de $[0,t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G, donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1=t_1x+(1-t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0x+(1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x,f(x)),(y,f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B=\{u\in[t_0,1]\ ;\ f\big(ux+(1-u)y\big)=uf(x)+(1-u)f(y)\}$$

a un plus petit élément t_2, et on note $x_2=t_2x+(1-t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0x+(1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x,f(x)),(y,f(y))]$ rencontre la courbe).

Sur $]t_1,t_2[$, l'application continue

$$u\mapsto f\big(ux+(1-u)y\big)-uf(x)-(1-u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1+t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\big(f(x_1)+f(x_2)\big)$$

11

X Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $a<b$. À quelle condition a-t-on $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$? si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| e^{i\theta}$...

12 Lemme de Grönwall

Soient $f,g \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f,g \geqslant 0$ et $C>0$. On suppose que

$$\forall\, x \geqslant 0,\quad f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\forall\, x \geqslant 0,\quad f(x) \leqslant C e^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

Étudier $h : x \mapsto \left(C+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$.

Solution de 12 : Lemme de Grönwall

Étudier $h : x \mapsto \left(C+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) e^{-\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$.

13 Centrale

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Solution de 13 : Centrale

Faire apparaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$ et utiliser l'uniforme continuité de f' (théorème de Heine).