TD ∗ Fonctions numériques d'une variable réelle

1 ENS

Trouver les sous-groupes finis du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$.

2 X-ENS : problèmes de points fixes

1. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que si $[0,1]\subset f([0,1])$ ou $f([0,1])\subset[0,1]$, alors f a un point fixe dans $[0,1]$.
2. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment.
3. Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante. Montrer que f a un point fixe.
4. Soit $f,g:[0,1]\to[0,1]$ deux fonctions continues telles que $f\circ g=g\circ f$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=g(x)$.
5. On garde les mêmes hypothèses et on suppose de plus f monotone. Montrer que f et g ont un point fixe commun.

3 Très classique

Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |f(x)|\leqslant ax+b.$$

4 X-ENS : théorème de Césaro continu

Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$. Montrer, en commençant par traiter le cas $\ell=0$, que $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$.

Même principe que l'exercice précédent. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in\mathbb{R}$ et $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $|f(x)|\leqslant M+\varepsilon x$.

5 Oraux divers : comportement à l'infini et uniforme continuité

Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Étudier les implications entre les propriétés suivantes :

(i) f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$;

(ii) f admet une limite finie en $+\infty$;

(iii) $f(x)=\underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}(x)$

6 X Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré au moins 2

1. Si $a,b\in\mathbb{R}$, montrer que $aP'+bP$ est scindé.

Se ramener à $a=0$ et faire apparaître la dérivée d'un produit.

2. Si P s'écrit $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$, montrer que $\sum_{k=0}^{d}a_kP^{(k)}$ est scindé.

Utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

7 Preuve de l'IAF complexe dans le cas général

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $|f'|\leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right)\end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

8 Caractérisation des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

Soit $f:I\to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k\geqslant1$.
Montrer que f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

9

Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.

10 Fonctions mid-convexes

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y)\in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.
On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y)=\Big\{t\in[0,1]\mid f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\Big\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$...

Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

11 X Soit $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $a<b$. À quelle condition a-t-on $\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b|f|$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$? si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\int_a^b f=\left|\int_a^b f\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$...

12 Lemme de Grönwall

Soient $f,g\in\mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f,g\geqslant0$ et $C>0$. On suppose que

$$\forall x\geqslant0,\quad f(x)\leqslant C+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\forall x\geqslant0,\quad f(x)\leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

Étudier $h:x\longmapsto\left(C+\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

13 Centrale

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Faire apparaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)$ et utiliser l'uniforme continuité de f' (théorème de Heine).