1. Exercices diverses

1 **Oraux divers** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto (\operatorname{tr} A)M + (\operatorname{tr} M)A$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable.

Solution de 1 : Oraux divers

FGN 2 3.26

Si M est un vecteur propre associé à une valeur propre λ, on a $M \neq 0_n$ et $\phi(M) = \lambda M$ donc $(\operatorname{tr} M)A = (\lambda - \operatorname{tr} A)M$. En reprenant la trace, on obtient $\operatorname{tr} M \operatorname{tr} A = (\lambda - \operatorname{tr} A)\operatorname{tr} M$ donc $\operatorname{tr} M = 0$ ou $\lambda = 2\operatorname{tr} A$.

Dans le cas où $\operatorname{tr} M = 0$, dans la première expression, on tire $(\lambda - \operatorname{tr} A)M$ avec $M \neq 0_n$, donc $\lambda = \operatorname{tr} A$.

Finalement, les deux valeurs propres potentielles sont $\operatorname{tr} A$ et $2\operatorname{tr} A$.

Or $\phi(M) = (\operatorname{tr} A)M \iff (\operatorname{tr} M)A = 0_n$.

Cela incite à traiter à part le cas où $A = 0_n$, qui donne facilement ϕ nul donc diagonalisable.

Supposons dorénavant que $A \neq 0_n$.

On a alors $\phi(M) = (\operatorname{tr} A)M \iff \operatorname{tr} M = 0$ donc $E_{\operatorname{tr} A}(\phi) = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ qui est de dimension $n^2 - 1$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle.

Il ne reste donc de la place que pour une dernière valeur propre... qui doit être $2\operatorname{tr} A$.

Soit $\operatorname{tr} A = 2\operatorname{tr} A$ ie $\operatorname{tr} A = 0$ et alors $\operatorname{Sp}\phi = \{\operatorname{tr} A\}$ et ϕ n'est pas diagonalisable (car ϕ n'est pas une homothétie, ou car la dimension du sous-espace propre est trop petite...)

Soit $\operatorname{tr} A \neq 2\operatorname{tr} A$ ie $\operatorname{tr} A \neq 0$ et $\phi(M) = (2\operatorname{tr} A)M \iff (\operatorname{tr} M)A = (\operatorname{tr} A)M \iff M = \dfrac{\operatorname{tr} M}{\operatorname{tr} A}A$. $M = A \neq 0_n$ convient par exemple comme vecteur propre associé à $2\operatorname{tr} A$ et on a obtenu $E_{2\operatorname{tr} A}(A) = \operatorname{Vect} A$ de dimension 1.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace, ϕ est diagonalisable.

Finalement, $\boxed{\phi \text{ est diagonalisable si et seulement si } A = 0_n \text{ ou } \operatorname{tr} A \neq 0.}$

---

2 **X-ENS : Lemme d'Hadamard et disques de Gershgörin** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose $R_i = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Montrer que, pour A quelconque, $\operatorname{Sp} A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C}, |z - a_{i,i}| \leqslant R_i\} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{i,i}, R_i)$.
3. On suppose à nouveau que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > R_i$.
   En commençant par traiter le cas où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| = R_i + 1$, montrer que
   $$|\det A| \geqslant \prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i).$$
4. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i} > R_i$.
   Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices vérifiant ces hypothèses est convexe et, en admettant qu'une fonction continue sur un convexe à valeurs réelles vérifie le théorème des valeurs intermédiaire, montrer que $\det A \geqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (|a_{i,i}| - R_i)$.

Solution de 2 : X-ENS : Lemme d'Hadamard et disques de Gershgörin

FGN 2 3.17

1. Classique et déjà vu : Prendre $X \neq \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$ et obtenir une contradiction avec une coordonnée de x de module maximal.
2. Traduire avec la question précédente que si $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
3. Soit A' la matrice construite à partir de A en divisant que ligne L_i par $|a_{i,i}| - R_i > 0$.
   On a bien $|a'_{i,i}| - R'_i = 1$.
   En utilisant la question précédente, pour tout valeur propre λ de A', on a i tel que $|\lambda - a'_{i,i}| \leqslant R'_i$, ce qui conduit, par inégalité triangulaire, à $|\lambda| \geqslant |a'_{i,i}| - R'_i = 1$.
   Le déterminant de A' étant le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité (on est dans $\mathbb{C}$, pas de problème pour avoir un polynôme caractéristique scindé), on obtient $|\det A'| \geqslant 1$, ce qui permet de conclure.

4. D'après la question précédente, il suffit de voir que $\det A > 0$.
Or, si A et B vérifient les hypothèses de la question, et si $t \in [0,1]$, on obtient sans trop de mal que $(1-t)A + tB$ les vérifie aussi.
Comme $M\mathscr{C} \mapsto \det M \in \mathbb{R}$ est continue (polynomial en les cœfficients de M), elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaire donc son image est un intervalle de $\mathbb{R}$, ne contenant pas 0 vu la question 1.
Comme $I_n \in \mathscr{C}$ est de déterminant $1 > 0$, on en déduit que pour tout matrice $A \in \mathscr{C}$, $\det A > 0$, ce qui permet de conclure.

---

3 Matrices stochastiques

Soit S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, c'est-à-dire des matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall\, i, j \in [\![1,n]\!]^2,\ \ a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que les éléments de S ont une valeur propre commune.
2. Si $A, B \in S$, en est-il de même pour AB ?
3. Soit $A \in S$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$. Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
4. Soit $A \in S$ et λ une valeur propre de S de module 1, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   (a) Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que c'est encore le cas pour λx_i.
   (b) En déduire que λ est une racine m^{e} de l'unité avec $m \leqslant n$.
   (c) On suppose que les cœfficients diagonaux de A sont tous non nuls. Montrer que la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

Solution de 3 : Matrices stochastiques

FGN 2 3.18 et 3.19

1. Soit Y le vecteur dont toutes les composantes valent 1. Alors une matrice A à cœfficients positifs est stochastique si et seulement si $AY = Y$ si et seulement si Y est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
2. AB est à cœfficients positifs et $ABY = AY = Y$ donc $AB \in S$.
3. Soit $Y \neq 0$ un vecteur propre associé à la valeur propre complexe λ et i un indice tel que $|x_i|$ soit maximal. Alors
$$|\lambda|\,|x_i| = |[AX]_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left|x_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right)|x_i| = |x_i|$$
donc $|\lambda| \leqslant 1$ car $|x_i| \neq 0$.
4. (a) On a bien $|\lambda x_i| = |x_i|$. Reste à voir que λx_i est une composante de X, donc l'un des x_j. Et ce n'est pas trivial. Enfin sauf si $\lambda = 1$.
Supposons $\lambda \neq 1$. À partir de la i^{e} ligne de $AX = \lambda X$, on tire $\lambda - a_{i,i} = \displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}$ $(*)$. Par inégalité triangulaire,
$$1 - a_{i,i} = |\lambda| - a_{i,i} \leqslant \left|\lambda - a_{i,i}\right| \leqslant \sum_{j \neq i} a_{i,j} \left|\frac{x_j}{x_i}\right| \leqslant \sum_{j \neq i} a_{i,j} = 1 - a_{i,i}.$$
Il y a donc égalité partout.
   - De $\left|\lambda - a_{i,i}\right| = |\lambda| - a_{i,i}$, on tire $|\lambda| = \left|\lambda - a_{i,i}\right| + \left|a_{i,i}\right|$ donc $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ sont positivement liés (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire), donc soit $a_{i,i} = 0$, soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$, et donc $\lambda = 1$ ce qui est exclu. On a donc $a_{i,i} = 0$.
   - De $\displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j} \left|x_j\right| = \sum_{j \neq i} a_{i,j} |x_i|$, on déduit que les x_j pour j tel que $a_{i,j} \neq 0$ ont tous les même module.
   - De $\left|\displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j} \frac{x_j}{x_i}\right| = \displaystyle\sum_{j \neq i} a_{i,j} \left|\frac{x_j}{x_i}\right|$ on déduit par cas d'égalité de l'inégalité triangulaire que les $a_{i,j} \dfrac{x_j}{x_i}$ sont tous sur la même demi-droite d'origine 0.

   Ainsi, on a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que si $j \neq i$ et $a_{i,j} \neq 0$, $x_j = \mathrm{e}^{\theta} x_i$.
   En remplaçant dans la relation $(*)$, on obtient $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et donc $x_j = \lambda x_i$ ce qui permet bien de conclure.

   (b) Avec la question précédente, $x_i, \lambda x_i, \lambda^2 x_i, \ldots, \lambda^n x_i$ sont toutes des composantes de X de module maximal. Comme il y en a $n+1$ et comme X n'a que n composante, nécessairement, on a $0 \leqslant < \ell \leqslant n$ tel que $\lambda^k x_i = \lambda^\ell x_i$. Alors, en posant $p = \ell - k \leqslant n$, comme $x_i \neq 0$, $\lambda^p = 1$.
   (c) Vu dans la première question.

4 Centrale

1. Soient $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $B\in\mathbb{K}[A]$ ou $A\in\mathbb{K}[B]$.
2. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

Solution de 4 : Centrale

1.
   - Si $A=\lambda I_2$ matrice scalaire, alors $A\in\mathbb{K}[B]$.
   - Si $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ avec $a\neq b$, on vérifie classiquement que B est alors diagonale : $B=\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}$ et, par interpolation de Lagrange, on peut trouver un polynôme P tel que $c=P(a)$ et $d=P(b)$ car $a\neq b$ donc $B=P(A)\in\mathbb{K}[A]$.
   - Si $A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$ avec $b\neq 0$ et $B=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$, alors $AB=\begin{pmatrix}a\alpha+b\gamma&a\beta+b\delta\\a\gamma&a\delta\end{pmatrix}=BA=\begin{pmatrix}a\alpha&b\alpha+a\beta\\a\gamma&a\delta+b\gamma\end{pmatrix}$ d'où on tire que $b\gamma=0$, $b(\alpha-\delta)=0$ donc $\gamma=0$ et $\alpha=\delta$ et enfin $B=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&\alpha\end{pmatrix}$ a la même forme que A.

     Pour tout polynôme P, $P(A)=\begin{pmatrix}P(a)&*\\0&P(a)\end{pmatrix}$. Calculons le cœfficient manquant.

     - Pour $P=1$, il vaut 0.
     - Pour $P=X$, il vaut b.
     - Pour $P=X^2$, il vaut $2ab$.
     - Pour $P=X^3$, il vaut $3a^2b$.

     On conjecture que pour $P=X^k$, il vaut $ka^{k-1}b$ ce qui se démontre aisément par récurrence.

     On obtient alors finalement $P(A)=\begin{pmatrix}P(a)&bP'(a)\\0&P(a)\end{pmatrix}$.

   Pour écrire $B=P(A)$, il faut trouver un polynôme P tel que $P(a)=\alpha$ et $bP'(a)=\beta$ c'est-à-dire $P'(a)=\dfrac{\beta}{b}$ (on a $b\neq 0$).

   Le polynôme $P=\dfrac{\beta}{b}(X-a+\alpha)$ convient.

   Dans le cas général, on peut se ramener à l'un des cas précédent par réduction de A (diagonalisation ou trigonalisation selon les cas), en remarquant que si $A=QA'Q^{-1}$, A commute avec $B'=Q^{-1}BQ$ donc soit $B'=Q^{-1}BQ$ est un polynôme en A' ce qui se récrit facilement B polynôme en A, soit l'inverse...

2. On trouve un contre-exemple. Par exemple : $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.

5 X-ENS

On définit une suite de matrices par $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}A_n&A_n\\A_n&-A_n\end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A_n.

Solution de 5 : X-ENS

FGN 3.5

On commence naturellement par regarder le cas $n=1$. Le polynôme caractéristique de A_1 est

$$\chi_1(X)=\begin{vmatrix}X-1&-1\\-1&X+1\end{vmatrix}=X^2-2$$

On a donc $\mathrm{Sp}\ A_1=\{\pm\sqrt{2}\}$. Essayons maintenant de trouver une relation entre le polynôme caractéristique de A_n et celui de A_{n+1}. Notons que la matrice A_n est de taille 2^n. On a, pour $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\chi_{n+1}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda I_{2^n}-A_n&-A_n\\-A_n&\lambda I_{2^n}+A_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_{2^n}&-A_n\\-\lambda I_{2^n}-2A_n&\lambda I_{2^n}+A_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda I_{2^n}&-A_n\\-2A_n&\lambda I_{2^n}\end{vmatrix}$$

en faisant les transvections par blocs $C_1\leftarrow C_1-C_2$ puis $L_2\leftarrow L_2+L_1$.

Pour calculer le déterminant par blocs, comme dans l'exercice classique, on cherche une factorisation soit de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ D & I \end{pmatrix}$, soit de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Quitte à prendre $\lambda \neq 0$, on trouve

$$\chi_{n+1}(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_{2^n} - \dfrac{2}{\lambda}A_n & -A_n \\ 0 & \lambda I_{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{2^n} & 0 \\ -\dfrac{2}{\lambda}A_n & I_{2^n} \end{pmatrix}\right) = \det\left(\lambda I_{2^n} - \frac{2}{\lambda}A_n\right)\lambda^{2^n} = \det\left(\lambda^2 I_{2^n} - 2A_n^2\right) = \det\left(\lambda I_{2^n} - \sqrt{2}A_n\right)\det\left(\lambda I_{2^n} + \sqrt{2}\,A_n\right)$$

On obtient donc en factorisant $\sqrt{2}$, $\chi_{n+1} = 2^{2^n}\chi_n\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)\chi_n\left(\frac{-X}{\sqrt{2}}\right)$. Les racines de χ_{n+1} s'obtiennent en multipliant celles de χ_n par $\pm\sqrt{2}$ ce qui montre que pour tout n, $\mathrm{Sp}\, A_n = \left\{\pm\sqrt{2}^n\right\}$.

Une autre solution [1] peut-être moins astucieuse (quoi que ?) peut être de diagonaliser A_1 et en déduire une diagonalisation par bloc de A_{n+1} comme convolée de A_1 avec A_n.

Comme A_1 a deux valeurs propres distinctes en dimension 2, elle est diagonalisable : $A_1 = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$.

Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (inutile de les calculer).

On pose alors $Q = \begin{pmatrix} a I_{2^n} & b I_{2^n} \\ c I_{2^n} & d I_{2^n} \end{pmatrix}$ et on vérifie qu'elle est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha I_{2^n} & \beta I_{2^n} \\ \gamma I_{2^n} & \delta I_{2^n} \end{pmatrix}$ à l'aide d'un produit par blocs.

On vérifie enfin que $A_{n+1} = Q\begin{pmatrix} \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}A_n \end{pmatrix}Q^{-1}$ et donc $\chi_n = \chi_{\sqrt{2}A_n}\chi_{-\sqrt{2}A_n}$ ce qui permet de retrouver le résultat précédent.

Dernière solution : résoudre une équation aux éléments propres $A_{n+1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A_n(X+Y) = \lambda X \\ A_n(X-Y) = \lambda Y \end{cases}$ En sommant les deux lignes on obtient $2A_nX = \lambda(X+Y)$ et en multipliant par A_n : $A_n^2 X = \dfrac{\lambda^2}{2}X$.

Si $X \neq 0$, on obtient que $\dfrac{\lambda^2}{2}$ est valeur propre de A_n^2 et quitte à se placer dans $\mathbb{C}$ pour trigonaliser, on remarque que c'est le carré d'une valeur propre de A_n... Sinon, c'est que $Y \neq 0$... On peut continuer mais c'est un peu du bricolage et moins réjouissant que les deux autres méthodes.

2. Trigonalisation

6 Avec la comatrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\tilde{A} = (\mathrm{Com}\, A)^{\intercal}$.

1. (a) Pour $I, J \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, on note $A|_{I\times J}$ la sous-matrice de A d'indices de lignes dans I et de colonnes dans J. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\det(\lambda I_n + A) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{\substack{I\subset\llbracket 1,n\rrbracket \\ |I|=n-j}} \det A|_{I^2}\right)\lambda^j.$$

   (b) En déduire une formule pour χ_A, retrouver ses cœfficients de degré n, $n-1$ et 0 et exprimer son cœfficient de degré 1 à l'aide de la comatrice.

2. (a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $\tilde{A}$.
   (b) Lorsque A est diagonalisable, quels sont les vecteurs propres de $\tilde{A}$?
   (c) Que dire de $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC = CA = 0$ si $\mathrm{rg}\, A = n-1$?

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Donner, en fonction des λ_i, l'expression des valeurs propres de $\tilde{A}$.

Solution de 6 : Avec la comatrice

FGN 2 2.9, 3.8 et 4.10

1. Merci Timothéo

1. (a) Notons $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A et $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On notera det le déterminant dans cette base et par multilinéarité, on a

$$\det(\lambda I_n + A) = \det(\lambda e_1 + C_1,\dots,\lambda e_n + C_n) = \sum_{\substack{D_k \in \{\lambda e_k, C_k\} \\ 1 \leqslant k \leqslant n}} \det(D_1,\dots,D_n)$$

Chaque terme de cette dernière somme est un monôme en λ dont le degré est nombre de fois où $D_k = \lambda e_k$. On va noter I l'ensemble des indices k pour lesquels $D_k = C_k$. Se donner un terme de la somme revient à se donner cette partie I et ce terme est alors un monôme de degré $n-j$ avec $j = |I|$ Son coefficient est alors le déterminant obtenu à partir de la matrice identité en remplaçant les colonnes d'indice dans I par les colonnes correspondantes dans A. En développant successivement par les colonnes de cette matrice qui sont celles de la matrice identité (avec un seul 1 sur la diagonale puis des zéros ailleurs), il reste in fine un déterminant de taille j qui est précisément $\det(A|_{I^2})$. En faisant une partition de la somme selon le cardinal de I, on obtient

$$\det(\lambda I_n + A) = \sum_{I \subset [\![1,n]\!]} \det(A|_{I^2})\lambda^{n-|I|} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{I \subset I|,n] \\ |I|=j}} \det(A|_{I^2})\lambda^{n-j}$$

(b) En changeant A en $-A$, le terme $\det(A|_{I^2})$ est transformé en $(-1)^{|I|}\det(A|_{I^2})$ si bien que

$$\chi_A = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\sum_{\substack{|I[1,n] \\ |I|=j}} \det(A|_{I^2}) \right) X^{n-j}$$

On retrouve en particulier le coefficient de X^{n-1} qui vaut $-\operatorname{tr} A$ et le coefficient constant qui vaut $(-1)^n \det A$. On pourra aussi noter que le coefficient en X est égal à $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\operatorname{Com} A)$.

2. (a) On a la relation $\tilde{A}A = \tilde{A}A = (\det A)I_n$. Si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $\lambda\widetilde{A}X = (\det A)X$ et si $\lambda \neq 0$, on a $\widetilde{A}X = \frac{\det A}{\lambda}X$, donc X est un vecteur propre de $\tilde{A}$. Si $\lambda = 0$ alors $\det A = 0$. Si $\operatorname{rg} A = n-1$, alors $\operatorname{Im}\widetilde{A} = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(X)$ donc il existe $\mu \in K$ tel que $\widetilde{A}X = \mu X$. Enfin si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2, \widetilde{A} = 0$ donc X est encore vecteur propre de A .

(b) On va encore distinguer les cas selon le rang de A .
   - Si A est diagonalisable et inversible, on a $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$. Les vecteurs propres de $\widetilde{A}$ sont ceux de A^{-1}, c'est-à-dire ceux de A. Ainsi les matrices A et $\widetilde{A}$ sont codiagonalisables.
   - Si $\operatorname{rg} A < n-1$ alors $\widetilde{A} = 0$ et tout vecteur non nul de K^n est vecteur propre pour $\widetilde{A}$.
   - Supposons que $\operatorname{rg} A = n-1$. Sans perte de généralité on suppose $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_k \neq 0$ pour $k \geqslant 2$. Comme on l'a vu dans la question 1 , on a $\operatorname{rg}\widetilde{A} = 1$ et $\operatorname{Im}\widetilde{A} = \operatorname{Ker} A$ et de plus $\operatorname{Ker}\widetilde{A} = \operatorname{Im} A$. Autrement dit, l'espace propre de $\widetilde{A}$ pour la valeur propre 0 est la somme des espaces propres de A pour les valeurs propres non nulles (c'est-à-dire l'image de A) et la droite $\operatorname{Im}\widetilde{A}$ est la droite $\operatorname{Ker} A$. Ici encore A et $\widetilde{A}$ sont codiagonalisables.

(c) Si $C \neq 0$, alors $\operatorname{Im} C \subset \operatorname{Ker} A$ et comme $\operatorname{Ker} A$ est de dimension 1, on a $\operatorname{Im} C = \operatorname{Ker} A$; de plus $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} C$ et comme les deux espaces ont même dimension on a $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} C$. En considérant une base de K^n adaptée à $\operatorname{Im} A$, on obtient une matrice P inversible telle que $P^{-1}CP = (0|\dots|0 \mid X)$, où $X \in \operatorname{Im} C = \operatorname{Ker} A$. Comme $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 0$, on obtient de même $P^{-1}\widetilde{A}P = (0|\dots|0 \mid Y)$, où $Y \in \operatorname{Im} C = \operatorname{Ker} A$. Les vecteurs X et Y sont colinéaires donc C est colinéaire à $\widetilde{A}$.

3. En tant que matrice carrée complexe, A est semblable à une matrice triangulaire T dont les termes diagonaux sont les λ_i. On va distinguer trois cas selon le rang de A.
   - Si tous les λ_i sont non nuls, i.e. si A est inversible, la matrice A^{-1} est semblable à la matrice triangulaire T^{-1} dont les termes diagonaux sont les inverses des λ_i, si bien que le spectre de $\widetilde{A} = (\operatorname{Com} A)^\top = (\det A)A^{-1}$ est l'ensemble des $\dfrac{\det A}{\lambda_i} = \displaystyle\prod_{j\neq i} \lambda_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
   - Si $\operatorname{rg} A < n-1$, la comatrice de A est nulle puisque aucune sous-matrice de A de taille $n-1$ ne peut être inversible : le spectre de $\widetilde{A}$ est réduit à $\{0\}$.
   - Supposons $\operatorname{rg} A = n-1$. Alors A possède un mineur de taille $n-1$ non nul et $\widetilde{A}$ est non nulle. De plus, $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = 0$. On a donc $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker}\widetilde{A} \neq \mathbb{C}^n$ et finalement $\operatorname{Ker}\widetilde{A} = \operatorname{Im} A$ est de dimension $n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$. Il reste à déterminer la dernière valeur propre qui vaut donc la trace de $\widetilde{A}$. Or, d'après la première question, $(-1)^{n-1}\operatorname{tr}\widetilde{A}$ est le coefficient de X dans χ_A.
   De plus, 0 est valeur propre de A. Si on suppose que $\lambda_n = 0$, on a $\chi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{n-1})X$ et on en déduit que la dernière valeur propre cherchée de $\widetilde{A}$ est $\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$.

Conclusion Dans tous les cas, les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont les $\mu_i = \displaystyle\prod_{j\neq i} \lambda_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A prises avec multiplicité.

7 Trigonalisation simultanée

1. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, montrer qu'elles ont un vecteur propre en commun, puis qu'elles sont simultanément trigonalisables (ie avec les mêmes matrices de passages).
2. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
3. Si $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles $AB - BA = C$, $AC = CA$, $BC = CB$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
4. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$, montrer que B est nilpotente.
   Si, plus généralement, on a $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $AB - BA = \lambda A + \mu B$, montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

Solution de 7 : Trigonalisation simultanée

FGN 2 4.21 à 4.24

1. Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement. Le corps de base étant algébriquement clos, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. L'endomorphisme v laisse stable $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$, car u et v commutent. Et donc v induit sur $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$ un endomorphisme v_λ. Cet endomorphisme admet un vecteur propre (car le corps de base est algébriquement clos). Or un vecteur propre de v_λ est un vecteur propre de v qui est dans $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id)$, et donc est aussi vecteur propre pour u.
   Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}_n$: « si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors il existe P inversibles et T, T' triangulaires supérieures telles que $A = PTP^{-1}$ et $B = PT'P^{-1}$ ».
   Pour $n = 1$, c'est bien clair.
   Montrons que $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$; soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui commutent. Les endomorphismes u et v de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associés à A et B commutent, donc d'après ce qui précède ont un vecteur propre commun. Dans une base commençant par ce vecteur propre, leurs matrices respectives sont de la forme
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} \mu & * \cdots\cdots * \\ 0 & \\ \vdots & B'' \\ 0 & \end{pmatrix}$$
   A' et B' commutent, donc, par produit par blocs, A'' et B'' commutent. On peut leur appliquer $\mathscr{P}_n$, il existe donc $P \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ et T'', U'' triangulaires supérieures telles que
$$P^{-1}A''P = T'' \quad , \quad P^{-1}B''P = U''$$
   Soit alors $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$; un produit par blocs montre que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathscr{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ sont triangulaires supérieures.
2. Comme dans la question précédente, il suffit de montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
   Or, par hypothèse, $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Ker}\, A$ donc $\mathrm{Im}\, B$ est stable par A (pour tout vecteur X, $ABX = 0 \in \mathrm{Im}\, B$) et par B.
   Avec des notations similaires à la question précédente, si u_i et v_i sont les endomorphismes induits par u et v sur $\mathrm{Im}\, v$, alors u_i est l'endomorphisme nul. Donc, si $\mathrm{Im}\, v \neq \{0\}$, un vecteur propre de v_i (qui existe bien car on est sur $\mathbb{C}$) est aussi un vecteur propre de u_i (associé à 0) et est donc un vecteur propre commun à u et v.
   Si $\mathrm{Im}\, v = 0$, alors $B = 0_n$ et on a bien A et B simultanément trigonalisables (ils ont donc au moins un vecteur propre en commun).
   On peut alors raisonner par récurrence sur n comme dans la question précédente.
3. Avec $AB - BA = C$ on remarque que des vecteurs propres communs à A et B sont dans $\mathrm{Ker}\, C$.
   On étudie donc $\mathrm{Ker}\, C$. Soit u, v, w canoniquement associés à A, B, C.
   S'il n'est pas réduit à 0, $\mathrm{Ker}\, w$ est stables par u, v et w vu les hypothèses.
   Les endomorphismes u_k, v_k induit par u et v sur $\mathrm{Ker}\, w$ vérifient alors $u_k \circ v_k - v_k \circ u_k = w_k = \tilde{0}$. donc commutent.
   Ils ont donc un vecteur propre en commun d'après la première question.
   Reste à voir qu'on a bien $\mathrm{Ker}\, w \neq \{0\}$. Sinon, C est inversible et $C^{-1}AB - C^{-1}BA = AC^{-1}B - C^{-1}BA = I_n$ ce qui aboutit à une contradiction en prenant la trace.
   On peut alors rédiger une récurrence comme dans la première question.
4. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$, on calcule $B^2 = BAB - B^2A = AB^2 - BAB$ en multipliant à gauche et à droite par A.
   On en déduit que $2B^2 = AB^2 - B^2A$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kB^= AB^k - B^kA$.
   On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}\, B^k = 0$ et donc, classiquement, B est nilpotente. (Il s'agit de l'exercice 11, cas particulier du 8).

Autre argument possible : $u : M \mapsto AM - MA$ est un endomorphisme qui admet k comme valeur propre si $B^k \neq 0_n$. Comme son spectre est fini (on est en dimension finie), on a au moins un $k \in \mathbb{N}$ tel que $B^k = 0_n$.
Supposons désormais que $AB - BA = \lambda A + \mu B$. Si $\lambda = \mu = 0$, on est ramené à la première question.
Supposons donc $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Sans perte de généralité, supposons que $\mu \neq 0$. On va utiliser la première partie de la question.
Posons $B' = \lambda A + \mu B$. On vérifie alors que $AB' - B'A = \mu B'$ donc, en posant, $A' = \dfrac{1}{\mu} A$, on a $A'B' - B'A' = B'$.
On en déduit que B' est nilpotente. On a alors $\operatorname{Ker} B' \neq \{0\}$ (B' n'est pas inversible) et on vérifie que $\operatorname{Ker} B'$ est stable par A et B'. On obtient alors comme dans la question 2 un vecteur propre de A dans $\operatorname{Ker} B'$, ce qui est aussi un vecteur propre de B.
On termine de nouveau par récurrence sur la dimension de l'espace.

3. Autour de la trace

8 **Centrale-Mines Ponts** Montrer que $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k.$$

Solution de 8 : Centrale-Mines Ponts

Si A et B ont le même polynôme caractéristique, en trigonalisant (on est dans $\mathbb{C}$), on arrive facilement à $\forall k \in \mathbb{N}, \ \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$.
Si, réciproquement, $\forall k \in \mathbb{N}, \ \operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$. On obtient à un système dont les équations sont de la forme $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \cup \operatorname{Sp}(B)} a_\lambda \lambda^k = 0$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ et dont la matrice est de Vandermonde avec des paramètres deux à deux distincts, donc le système est de Cramer et tous les a_λ sont nuls, donc les multiplicités des valeurs propres pour A et pour B sont les mêmes, ce qui permet de conclure.

Autre argument possible : Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs de A et B comptées avec multiplicité :

$$\chi_A = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{et} \quad \chi_B = \left(X - \mu_1\right) \cdots \left(X - \mu_n\right).$$

L'hypothèse proposée donne

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = \mu_1^k + \cdots + \mu_n^k$$

Certains λ_i peuvent correspondre à des μ_j, on simplifie ceux-ci et, quitte à reprendre l'indexation, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda_1^k + \cdots + \lambda_r^k = \mu_1^k + \cdots + \mu_r^k$$

avec $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \cap \left\{\mu_1, \dots, \mu_r\right\} = \varnothing$. Par combinaison linéaire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(\lambda_1) + \cdots + P(\lambda_r) = P\left(\mu_1\right) + \cdots + P\left(\mu_r\right).$$

On peut définir un polynôme P qui s'annule sur les λ_i et prend la valeur 1 sur les μ_i. Pour celui-ci, il vient $0 = r$. On en déduit que les λ_i initiaux et les μ_i initiaux sont égaux à l'ordre près. Les polynômes caractéristiques de A et B sont donc identiques.

9 **X-ENS – Cœfficients du polynôme caractéristique (bis)**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\chi_A = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_{n-1} X + c_n$ son polynôme caractéristique.
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
En exprimant de deux manières différentes le polynôme $X^{n-1} \chi_A'(1/X)$ montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \operatorname{tr} A & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr} A^2 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \operatorname{tr} A^k & \cdots & \cdots & \operatorname{tr} A^2 & \operatorname{tr} A \end{vmatrix}$$

On retrouve en particulier le résultat de l'exercice précédent.

Solution de 9 : X-ENS – Cœfficients du polynôme caractéristique (bis)

FGN 2 3.11

L'expression $\dfrac{\chi_A'}{\chi_A}$, qui est la dérivée logarithmique de χ_A, vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_k}$, avec $\chi_A=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$. Par ailleurs, on a

$$X^{n-1}\chi_A'(1/X)=X^{n-1}\chi_A(1/X)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1/X-\lambda_k}=X^n\chi_A(1/X)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_kX}$$

On peut penser à écrire sous forme de somme la fraction $\dfrac{1}{1-\lambda_kX}$ à la manière des séries géométriques (séries entières). On peut le faire en évaluant en un x suffisamment petit pour que les séries géométriques convergent, ou alors contourner le problème (ce serait possible directement avec les polynômes si on avait des connaissances sur les séries formelles mais ce n'est pas le cas).

On va contourner le problème en faisant apparaître une somme géométrique finie : $\dfrac{1-(\lambda_kX)^{n+1}}{1-\lambda_kX}=\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}(\lambda_kX)^\ell$.

Notons $Q=X^n\chi_A(1/X)$ et $R=X^n\chi_A(1/X)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda_kX)^{n+1}}{1-\lambda_kX}=\sum_{k=1}^{n}(\lambda_kX)^{n+1}\frac{\prod_{j=1}^{n}(1-\lambda_jX)}{1-\lambda_kX}=X^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_k^{n+1}\prod_{j\neq k}(1-\lambda_jX)\right)$ qui sont deux polynômes. En reprenant le calcul,

$$\begin{aligned}X^{n-1}\chi_A'(1/X)&=Q\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1-(\lambda_kX)^{n+1}}{1-\lambda_kX}+R\\&=Q\times\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}(\lambda_kX)^\ell+R\\&=Q\times\sum_{\ell=0}^{n}\left(\operatorname{tr}A^\ell\right)X^\ell+R\end{aligned}$$

où $\deg R\geqslant n+1$ et $Q=c_0+c_1X+\cdots+c_nX^n$ où $c_0=1$ et

$$X^{n-1}\chi_A'(1/X)=nc_0+(n-1)c_1X+\cdots+c_{n-1}X^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}(n-k)c_kX^k$$

Par unicité des cœfficients de X^p pour $1\leqslant p\leqslant n$, on obtient

$$(n-p)c_p=\sum_{i+j=p}c_i\operatorname{tr}A^j=c_p\operatorname{tr}I_n+c_{p-1}\operatorname{tr}A+\cdots+c_1\operatorname{tr}A^{p-1}+\operatorname{tr}A^p$$

ou encore, $\left(\operatorname{tr}A^{p-1}\right)c_1+\left(\operatorname{tr}A^{p-2}\right)c_2+\cdots+(\operatorname{tr}A)c_{p-1}+pc_p=-\operatorname{tr}A^p$. Lorsqu'on écrit ces relations pour $1\leqslant p\leqslant k$ où $k\in[\![1,n]\!]$, on obtient un système linéaire triangulaire inférieur, de Cramer, dont le déterminant de la matrice est $k!$.

Les classiques formules de Cramer donnent alors le résultat

$$c_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0&-\operatorname{tr}A\\\operatorname{tr}A&2&0&\dots&0&-\operatorname{tr}A^2\\\operatorname{tr}A^2&\operatorname{tr}A&3&\ddots&\vdots&-\operatorname{tr}A^3\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\\operatorname{tr}A^{k-2}&\dots&\dots&\operatorname{tr}A&k-1&-\operatorname{tr}A^{k-1}\\\operatorname{tr}A^{k-1}&\dots&\dots&\operatorname{tr}A^2&\operatorname{tr}A&-\operatorname{tr}A^k\end{vmatrix}$$

et on obtient l'expression de l'énoncé en sortant le scalaire -1 de la dernière colonne et en appliquant une permutation circulaire des k colonnes dont la signature est $(-1)^{k-1}$.

10 **X** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr}A^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$.

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module <1.

Solution de 10 : X

Trigonaliser puis raisonner par récurrence sur le nombre de valeurs propres distinctes de A.

La matrice A est trigonalisable et si l'on note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ses valeurs propres distinctes alors

$$\operatorname{tr}(A^m)=\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\lambda_j^m$$

avec α_j la multiplicité de la valeur propre λ_j. Pour conclure, il suffit d'établir résultat suivant : « Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Si $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ alors $\forall 1 \leqslant j \leqslant p, |\lambda_j| < 1$ ». Raisonnons pour cela par récurrence sur $p \geqslant 1$. Pour $p = 1$, la propriété est immédiate. Supposons la propriété vraie au rang $p \geqslant 1$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_{p+1} \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \tag{1}$$

Par décalage d'indice, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \lambda_j^{m+1} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \tag{2}$$

$\lambda_{p+1} \times (1) - (2)$ donne

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \left(\lambda_{p+1} - \lambda_j\right) \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

qui se comprend encore

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

avec les $\beta_1,\dots,\beta_p$ non nuls. Par hypothèse de récurrence, on a alors $\forall 1 \leqslant j \leqslant p, \lambda_j < 1$ pour tout $j \in \{1,\dots,p\}$. On en déduit $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda_j^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ et la relation (1) donne alors $\alpha_{p+1}\lambda_{p+1}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ d'où l'on tire $|\lambda_{p+1}| < 1$. La récurrence est établie.

11 Mines-Ponts

Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

Solution de 11 : Mines-Ponts

Même principe que l'exercice 8 dont c'est un cas particulier (en prenant $B = 0$.)

4. Autour de la nilpotence

12 Commutant d'un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathscr{B} = \left(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = \left(u^{n-1}(a), \dots, u(a), a\right)$.
3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in \operatorname{Vect}\left(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n-1}\right) = \mathbb{K}[u]$.

Solution de 12 : Commutant d'un endomorphisme nilpotent

1. Comme $u^{n-1} \neq \tilde{0}$, on a $a \in E$ tel que $u^{n-1}(a) \neq 0_E$.
   Supposons $\lambda_0 a + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(a) = 0_E$. Si les λ_i ne sont pas tous nuls, soit i indice minimal tel que $\lambda_i \neq 0$.
   En composant par u^{p-1-i}, on obtient $\lambda_i u^{p-1}(a) = 0$ ce qui est contradictoire.
   On a donc une famille libre de $n = \dim E$ vecteurs donc une base de E.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
3. Le sens réciproque est immédiat. Supposons $u \circ v = v \circ u$. Soit $x \in E$. On décompose x dans $\mathscr{B}$ en $x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k u^k(a)$.
   Alors $v(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k v \circ u^k(a) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k u^k(v(a))$.

On peut décomposer $v(a)=\sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell(a)$ et réinjecter $v(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} x_k v_\ell u^{k+\ell}(a)=\sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell(x)$.

Donc $v=\sum_{\ell=0}^{n-1} v_\ell u^\ell \in \mathbb{K}[u]$.

13 Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F}=\left(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\right)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p=n$.
   (a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
   (c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F=\operatorname{Ker} u^k$.

Solution de 13 : Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent

1.
2. Comme dans l'exercice précédent.
3. Famille libre de p vecteurs en dimension n.
4. (a) Comme dans l'exercice précédent.
   (b) Dans cette même base, u^k est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang $n-k$ donc $\dim\left(\operatorname{Ker} u^k\right)=k$.
   (c) u_F est nilpotent sur F qui est de dimension k, donc $u_F^k=\tilde{0}$ donc $F=\operatorname{Ker} u_F^k = F \cap \operatorname{Ker} u^k$ donc $F \subset \operatorname{Ker} u^k$ et par égalité des dimensions, $F=\operatorname{Ker} u^k$.

14 Inversion et nilpotence

Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que I_n-N et I_n+N sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à I_n+N.
   (*On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x)=\underset{x\to 0}{o}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P=X^nQ$ à l'aide d'une division euclidienne.*)

Solution de 14 : Inversion et nilpotence

1. Penser à des séries géométrique et vérifier que $(I_n-N)^{-1}=I_n+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$ et une formule analogue pour I_n+N.
2. Le DL de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 au voisinage de 0 s'écrit $\sqrt{1+x}=P_n(x)+o(x^n)$ où P_n est un polynôme connu (en écrivant $(1+x)^{1/2}$). En élevant au carré, on obtient $1+x=P_n^2(x)+o(x^n)$.
   Donc $P_n^2(x)-1-x=o(x^n)$. Posons la division euclidienne de P_n^2-1-X par X^n : $P_n^2-1-X=X^nQ+R$. Alors
   $$\frac{P_n^2(x)-1-x}{x^n}=Q(x)+\frac{R(x)}{x^n}\to 0.$$
   Mais comme le degré de R est au plus $n-1$ et $Q(x)\to Q(0)$, on en déduit que nécessairement $R=0$.
   On a alors $P_n^2-1-X=X^nQ$ puis en évaluant en N dont l'indice de nilpotence est au plus n, $P_n^2(N)-1-N=N^nQ(N)=0_n$, donc $1+N=(P_n(N))^2$ donc $\boxed{P_n(N)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac12\left(\frac12-1\right)\cdots\left(\frac12-k+1\right)}{k!}N^k}$ répond à la question.