TD ∗ Réduction : point de vue géométrique

1. Exercices diverses

1 Oraux divers Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M\in M_n(\mathbb{C})\mapsto(\operatorname{tr}A)M+(\operatorname{tr}M)A$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit diagonalisable.

2 X-ENS : Lemme d'Hadamard et disques de Gershgörin Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On pose $R_i=\sum\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}|a_{i,j}|$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

1. On suppose que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>R_i$. Montrer que la matrice A est inversible.
2. Montrer que, pour A quelconque, $\operatorname{Sp}A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}\{z\in\mathbb{C},|z-a_{i,i}|\leqslant R_i\}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{D}(a_{i,i},R_i)$.
3. On suppose à nouveau que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|>R_i$.
En commençant par traiter le cas où pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}|=R_i+1$, montrer que
$$|\det A|\geqslant\prod_{i=1}^{n}\left(|a_{i,i}|-R_i\right).$$
4. On suppose que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,i}>R_i$.
Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}$ des matrices vérifiant ces hypothèses est convexe et, en admettant qu'une fonction continue sur un convexe à valeurs réelles vérifie le théorème des valeurs intermédiaire, montrer que $\det A\geqslant\prod\limits_{i=1}^{n}\left(|a_{i,i}|-R_i\right)$.

3 Matrices stochastiques Soit S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, c'est-à-dire des matrices $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall\, i,j\in[\![1,n]\!]^2,\ \ a_{i,j}\geqslant 0$ et $\forall\, i\in[\![1,n]\!],\ \ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}=1$.

1. Montrer que les éléments de S ont une valeur propre commune.
2. Si $A,B\in S$, en est-il de même pour AB ?
3. Soit $A\in S$ et $\lambda\in\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}A$. Montrer que $|\lambda|\leqslant 1$.
4. Soit $A\in S$ et λ une valeur propre de S de module 1, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   (a) Si x_i est une composante de X de module maximal, montrer que c'est encore le cas pour λx_i.
   (b) En déduire que λ est une racine m^{e} de l'unité avec $m\leqslant n$.
   (c) On suppose que les cœfficients diagonaux de A sont tous non nuls. Montrer que la seule valeur propre de A de module 1 est 1.

4 Centrale

1. Soient $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AB=BA$. Montrer que $B\in\mathbb{K}[A]$ ou $A\in\mathbb{K}[B]$.
2. Le résultat subsiste-t-il dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$?

5 X-ENS On définit une suite de matrices par $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence
$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}A_n&A_n\\A_n&-A_n\end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres de A_n.

2. Trigonalisation

6 Avec la comatrice

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\tilde{A}=(\operatorname{Com}A)^{\intercal}$.

1. (a) Pour $I,J\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])$, on note $A|_{I\times J}$ la sous-matrice de A d'indices de lignes dans I et de colonnes dans J. Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$,
$$\det(\lambda I_n+A)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{\substack{I\subset[\![1,n]\!]\\ |I|=n-j}}\det A|_{I^2}\right)\lambda^j.$$
   (b) En déduire une formule pour χ_A, retrouver ses cœfficients dedegré n, $n-1$ et 0 et exprimer son cœfficient de degré 1 à l'aide de la comatrice.
2. (a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $\tilde{A}$.
   (b) Lorsque A est diagonalisable, quels sont les vecteurs propres de $\tilde{A}$?
   (c) Que dire de $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AC=CA=0$ si $\operatorname{rg}A=n-1$?
3. On suppose que $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Donner, en fonction des λ_i, l'expression des valeurs propres de $\tilde{A}$.

7 Trigonalisation simultanée

1. Si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutent, montrer qu'elles ont un vecteur propre en commun, puis qu'elles sont simultanément trigonalisables (ie avec les mêmes matrices de passages).
2. Si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB=0$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
3. Si $A,B,C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles $AB-BA=C$, $AC=CA$, $BC=CB$, montrer qu'elles sont simultanément trigonalisables.
4. Si $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB-BA=B$, montrer que B est nilpotente.
Si, plus généralement, on a $\lambda,\mu\in C$ tels que $AB-BA=\lambda A+\mu B$, montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

3. Autour de la trace

8 **Centrale-Mines Ponts** Montrer que $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ont même polynôme caractéristique si et seulement si

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \operatorname{tr}A^k=\operatorname{tr}B^k.$$

9 **Cœfficients du polynôme caractéristique (bis)**

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\chi_A=X^n+c_1X^{n-1}+\cdots+c_{n-1}X+c_n$ son polynôme caractéristique.
On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
En exprimant de deux manières différentes le polynôme $X^{n-1}\chi_A'(1/X)$ montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,

$$c_k=\frac{(-1)^k}{k!}\begin{vmatrix} \operatorname{tr}A & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \operatorname{tr}A^2 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \operatorname{tr}A^k & \cdots & \cdots & \operatorname{tr}A^2 & \operatorname{tr}A \end{vmatrix}$$

On retrouve en particulier le résultat de l'exercice précédent.

10 **X** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr}A^m\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$.

Montrer que les valeurs propres de A sont toutes de module <1.

11 **Mines-Ponts**

Montrer que $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\operatorname{tr}A^k=0$.

4. Autour de la nilpotence

12 **Commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$, et $u\in\mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe $a\in E$ tel que $\mathscr{B}=\big(a,u(a),\dots,u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.
2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}'=\big(u^{n-1}(a),\dots,u(a),a\big)$.
3. Soit $v\in\mathscr{L}(E)$. Montrer que $u\circ v=v\circ u$ si et seulement si $v\in\operatorname{Vect}\big(\mathrm{id}_E,u,\dots,u^{n-1}\big)=\mathbb{K}[u]$.
Indication : on pourra introduire les coordonnées de $v(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.

13 **Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n\geqslant 2$ et $u\in\mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a\in E$ tel que $u^{p-1}(a)\neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F}=\big(a,u(a),\dots,u^{p-1}(a)\big)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p\leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p=n$.
   (a) Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\dim\operatorname{Ker}u^k=k$.
   (c) Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k\geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F=\operatorname{Ker}u^k$.

14 **Inversion et nilpotence** Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que I_n-N et I_n+N sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à I_n+N.
(*On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x)\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P=X^nQ$ à l'aide d'une division euclidienne.*)