1. Groupe symétrique

1 Déterminer tous les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{\pm 1\}, \times)$.

2 **Théorème de Cayley** [1]

En s'intéressant aux translations, démontrer le théorème de Cayley qui affirme que tout groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

3 **ENS**

1. Quel est le nombre minimal de permutations nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?
2. Si σ est une permutation, si $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ sont les orbites de σ, on note

$$N(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} (|\Omega_i| - 1)$$

Montrer que, si τ est une transposition,

$$N(\tau\sigma) = N(\sigma) \pm 1$$

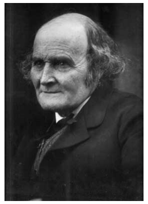
3. Quel est le nombre minimal de transpositions nécessaires pour engendrer $\mathfrak{S}_n$?

4 **X-ENS – Groupe résoluble** Soit G un groupe. On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec x et y dans G. On note D^n la n^{e} itérée de l'opération D et on dit que G est résoluble lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D^n(G) = \{e\}$.

1. On suppose qu'il existe deux groupes N et H et deux morphismes $i : N \to G$ et $s : G \to H$ avec i injectif, s surjectif et $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} s$.
   Montrer que G est résoluble si et seulement si N et H le sont.
2. Montrer que $\mathfrak{A}_5$ est engendré par les 3-cycles, puis que $D(\mathfrak{A}_5) = \mathfrak{A}_5$ puis, à l'aide du morphisme de signature, que $\mathfrak{S}_5$ n'est pas résoluble.

La notion de groupe résoluble a pour origine la théorie de Galois. Le fait que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ ne soit pas résoluble pour $n \geqslant 5$ traduit l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation polynomiale générale de degré $\geqslant 5$.

---

1. 

Arthur Cayley (1821 - 1895, Angleterre) est un avocat devenu mathématicien, anglais. Très prolifique, il introduit en particulier les matrices et les opérations sur celles-ci comme nous les étudions aujourd'hui. Il démontre le théorème de Cayley-Hamilton (au programme de spé) en dimension 2 et 3.

2. Déterminant

5 **Centrale** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à ± 1.

Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

6 **Centrale**

1. Montrer que le déterminant de la matrice carrée

$$\begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

   est un entier impair.
2. Dans un troupeau de $2n+1$ vaches (avec $n \in \mathbb{N}$), on peut toujours, en retirant une vache former deux groupes de n vaches de même masse totale. Montrer que chaque vache à la même masse.

7 **X-Centrale** Calculer le déterminant de Vandermonde « incomplet »

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 \dots\dots x_1^{k-1} & x_1^{k+1} \dots\dots x_1^n \\ 1 & x_2 \dots\dots x_2^{k-1} & x_2^{k+1} \dots\dots x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \dots\dots x_n^{k-1} & x_n^{k+1} \dots\dots x_n^n \end{vmatrix}$$

Le faire apparaître comme mineur d'un déterminant de Vandermonde.

8 **Mines** Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ réels distincts. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0, \dots, a_n)$ pour que $\big(P(\alpha_0 X), P(\alpha_1 X), \dots, P(\alpha_n X)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

9 **ENS** Soit A un ensemble fini de cardinal $m \geqslant 2$ et $U_1, \dots, U_n$ des parties non vides deux à deux distinctes de A. On suppose qu'il existe un entier $a \geqslant 0$ tel que si $i \neq j$, $\left|U_i \cap U_j\right| = a$. Montrer que $n \leqslant m$.

Écrire $|U_i \cap U_j|$ comme le coefficient d'un produit de matrices à l'aide d'indicatrices, et calculer le déterminant de cette matrice produit.

10 Écrit Mines - Déterminant de Cauchy

On considère un entier $n>0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de réels telles que $a_k+b_k\neq 0$ pour tout $k\in\{1,2,\dots,n\}$. Pour tout entier m tel que $0<m\leqslant n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m}\end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle $R=\dfrac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$.

1. Montrer que si on écrit la décomposition en éléments simples de R sous la forme
$$R=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{X+b_k},$$
alors
$$A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}.$$
On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par $\begin{pmatrix}R(a_1)\\R(a_2)\\\vdots\\R(a_n)\end{pmatrix}$.
2. En déduire que
$$D_n=\frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.$$

11 Classiques autour de la comatrice

Soit $n\geqslant 2$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\operatorname{Com}A$ sa comatrice.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(\operatorname{Com}A)=\begin{cases} n & \text{si } \operatorname{rg}A=n\\ 1 & \text{si } \operatorname{rg}A=n-1\\ 0 & \text{si } \operatorname{rg}A\leqslant n-2\end{cases}$
2. Calculer $\det(\operatorname{Com}A)$.
3. Calculer $\operatorname{Com}(\operatorname{Com}A)$ pour $n\geqslant 3$.
4. Soit $B\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\cup\{0_n\}$. Résoudre l'équation $\operatorname{Com}A=B$ d'inconnue $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On peut montrer qu'il y a aussi des solutions lorsque B est de rang 1 mais c'est nettement plus difficile.
5. Montrer que si $A,B\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Com}(AB)=\operatorname{Com}A\operatorname{Com}B$ et expliquer comment généraliser ce résultat à toutes les matrices.
6. Si A est une matrice de projection, que peut-on dire de $\operatorname{Com}A$?
7. **X** – Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant nul. Montrer que toutes les matrices carrées de taille 2 extraites de la comatrice de A sont de déterminant nul.

12 Résultant de deux polynômes

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ un polynôme de degré n sur $\mathbb{K}$. Pour m entier naturel donné on définit la matrice de format $(m+n)\times m$:

$$M(P,m)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ a_n & & & a_0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_n\end{pmatrix}$$

Soit deux polynômes P et Q de degrés respectifs $n\geqslant 1$ et $m\geqslant 1$.
On définit $\rho(P,Q)$ comme le déterminant de la matrice définie par blocs $\big(M(P,m)\big|M(Q,n)\big)$.

1. De quelle famille de polynômes (et dans quel espace ?) la matrice $\big(M(P,m)\big|M(Q,n)\big)$ est-elle la matrice dans la base canonique ?
2. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   (i) P et Q ont un diviseur commun de degré supérieur ou égal à 1.
   (ii) il existe un polynôme U non nul de degré au plus $m-1$ et un polynôme V non nul de degré au plus $n-1$ tels que $UP=VQ$.
   (iii) $\rho(P,Q)=0$.
   On suggère de montrer (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) et (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii).
3. Calculer $\rho(P,P')$ pour $P=aX^2+bX+c$ puis pour $P=X^3+pX+q$. Interpréter.
4. En utilisant de simples outils d'analyse, donner une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à cœfficients réels X^3+pX+q ait trois racines réelles distinctes.
5. **ENS** – Soient a, b deux nombres complexes algébriques : il existe des polynômes non nuls P et Q à cœfficients rationnels dont a et b sont respectivement racines.
   (a) Montrer que $P(a+b-X)$ et Q ont une racine commune.
   (b) En considérant par exemple le polynôme $P(Y-X)$ comme polynôme de $(\mathbb{Q}(Y))[X]$, montrer qu'il existe un polynôme à cœfficients rationnels dont $a+b$ est racine.
   (c) Déterminer un tel polynôme pour $a=\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{3}$.