1 X

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré au moins 2

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que $aP' + bP$ est scindé.

   Se ramener à $a = 0$ et faire apparaître la dérivée d'un produit.

2. Si P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, montrer que $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}$ est scindé.

   Utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

2 X-ENS

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $(P')^p$ divise P^q.

3 X-ENS

1. Soit P un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Démontrer que P n'a pas de racine double dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5. On suppose que P admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$. Montrer que P possède une racine dans $\mathbb{Q}$.

4 X-ENS

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P = A^2 + B^2$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.

5 X-ENS – Critère d'Eisenstein et polynômes cyclotomiques

1. On dit qu'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$ est **primitif** si le pgcd de ses cœfficients est égal à 1. En introduisant, pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ et p premier, le polynôme $\overline{P} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ (on rappelle que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps) dont les cœfficients $\overline{a_k}$ sont les classes modulo p des cœfficients a_k de P, montrer que le produit de deux polynômes primitifs l'est encore.
2. Pour $A \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on appelle **contenu** de A, noté $c(A)$, le PGCD de ses cœfficients. Montrer que si A et B sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, alors $c(AB) = c(A)c(B)$.
3. Montrer que si $A \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, alors il l'est sur $\mathbb{Q}[X]$.
4. Montrer le **critère d'Eisenstein** : si $A = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et p premier tel que
   (a) p ne divise pas a_n ;
   (b) p divise $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$;
   (c) p^2 ne divise pas a_0.
   alors A est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
5. On pose p premier, $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{p}}$, et $\Phi_p = X^{p-1} + \cdots + X + 1$ appelé p^{e} **polynôme cyclotomique**[1]
   (a) Montrer à l'aide du critère d'Eisenstein que le polynôme $(X+1)^{p-1} + \cdots + (X+1) + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) En déduire que Φ_p est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
   (c) Démontrer que l'ensemble I des polynômes annulateurs de ω dans $\mathbb{Q}[X]$ est $\Phi_p \mathbb{Q}[X]$.
   (d) Démontrer que $\mathbb{Q}[\omega] = \{P(\omega),\ P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un corps, appelé **corps cyclotomique**.
   Quelle est sa dimension en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel ?

1. Plus généralement, le n^{e} polynôme cyclotomique est $\Phi_n = \prod_{\xi \in \Pi_n} (X - \xi)$ où Π_n est l'ensemble des racines primitives n^{e} de l'unité, c'est-à-dire qui engendrent $\mathbb{U}_n$, c'est-à-dire les $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \wedge n = 1$. On peut montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ et qu'il est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.