Suites de fonctions

Exercices vus en cours

1 **CCINP 10** On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

Solution de 1 : CCINP 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.
   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)}{n+x}$, et donc
   $$\forall x \in [0,1],\ \left|f_n(x)-f(x)\right| \leqslant \frac{2\mathrm{e}}{n}.$$
   Ce majorant indépendant de x tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale. On a donc
   $$\int_0^1 (x^2+1)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}-3$.

2 **CCINP 48** $C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $\left(P_n f\right)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.

3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Solution de 2 : CCINP 48

1. Toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$ et à valeurs réelles ou complexes est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales.
2. On pose $\forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $N_\infty(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ (rappelons que toute fonction continue sur un segment est bien bornée).
   (a) f et P_n étant continues sur $[0,1]$,
   $$\forall t \in [0,1],\ \left|P_n(t)f(t) - f^2(t)\right| = |f(t)||P_n(t) - f(t)| \leqslant N_\infty(f)N_\infty(P_n - f).$$
   On en déduit que
   $$N_\infty\left(P_n f - f^2\right) \leqslant N_\infty(f)N_\infty(P_n - f) \qquad (1)$$
   Or (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$ donc $N_\infty(P_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc, d'après (1), $N_\infty\left(P_n f - f^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Donc $\left(P_n f\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f^2.
   (b) D'après la question précédente, $\left(P_n f\right)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n f$ est continue sur $[0,1]$.
   Donc, d'après le théorème d'intégration d'une limite uniforme de fonctions continues,
   $$\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)\mathrm{d}t$ et $P \to 0$ sont linéaires et coïncident sur la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ donc elles sont égales. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t = 0$.
3. D'après les questions 2.(b) et 2.(c), on a $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or f^2 est positive et continue sur $[0,1]$, donc f^2 est nulle sur $[0,1]$ et donc f est nulle sur $[0,1]$.

Autres exercices

3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad f_n(x) = x^p\left(1 + n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}\right).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > \alpha$.
3. Déterminer le limite pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 x^5\left(1 + n^4 \mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

Solution de 3 :

1. $f : x \mapsto x^p$ (traiter le cas $x = 0$ à part)
2. Faire l'étude de la fonction $\left|f_p - f\right|$.
3. Utiliser le théorème de limite d'intégrales sur un segment par convergence uniforme.

Séries de fonctions

Exercices vus en cours

4 CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.

   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Solution de 4 : CCINP 14

1. Voir cours.
2. Il suffit de l'appliquer à la suite des sommes partielles (S_n) dont la convergence uniforme en tant que suite de fonctions est équivalente à la convergence uniforme de la série de fonction $\sum f_n$. Par ailleurs, la continuité des fonctions f_n implique celle des sommes partielles S_n.
3. La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (si $f_n : x\mapsto x^n$, alors $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{2^n}$ qui est un terme général de série géométrique convergente).

   De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

   On en déduit alors que $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{2^n}$.

5

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,1]$, $f_n(x)=(-1)^n x^n(1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$.

En déduire la valeur de $S=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Solution de 5 :

Réponse : $2\ln 2-\frac{5}{4}$.

6

Montrer que $\zeta : x\in]1,+\infty[\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ.

Montrer que $\eta : x\in\mathbb{R}_*^+\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

7 **CCINP 16** On considère la série de fonctions de terme général f_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad f_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right].$$

1. Démontrer que S est définie sur $[0,1]$.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

   En utilisant $S(1)$ montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

   En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Démontrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et calculer $S'(1)$.

Solution de 7 : CCINP 16

1. On a, pour tout $x \in]0,1]$, $-u_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2}$ terme général positif de série convergente, donc, par comparaison, $\sum u_n(x)$ converge.
   C'est aussi le cas pour $x = 0$ car $u_n(0) = 0$.
   Donc S est bien définie sur $[0,1]$.
2. Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n}$, u_n est la somme partielle d'ordre n de la série précédente pour $x = 1$, donc $u_n \to S(1)$.

   Ainsi $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \mathcal{O}(1) = \ln n + \mathrm{o}(\ln n) \sim \ln n$.
3. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.

   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.

   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   On en déduit que $\left\|u_n'\right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

   Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
   On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$.

   Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$.

Or $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N \to +\infty]{} -1$.

Donc $S'(1) = -1$.

8

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer f' et étudier les variations de f.

Autres exercices

9

Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f : x \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

Solution de 9 :

Il y a convergence normale sur **R**, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2 x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur **R** tout entier).

10

Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n} \cos\left(n^2 x\right)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| \leqslant 10^{-3}.$$

11

Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Vérifier que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 11 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\tilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leqslant R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leqslant \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-2x}\right)$$

12 1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?

2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 12 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$$

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^{A}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{A}\frac{x^2}{1+tx^2}\mathrm{d}t$$

On intègre avec des $\ln$, on prend les limites quand $A\to+\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leqslant S(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2}+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2, avec $1\leqslant a\leqslant 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x\to 0} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2. Donc, notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x\to 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(1+nx^2)}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1\leqslant b\leqslant 2$, c'est agréable.

13

Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f=g$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Solution de 13 :

1. Pour f, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :
$$\left|\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}\right|=\frac{1}{|x+n+1|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$$
donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x\notin\mathbb{Z}^-$.
Pour g, on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0,\lfloor -x\rfloor)$ (pour avoir $x+n>0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
2. On vérifie que f converge normalement sur $[1,+\infty[$: si $x\geqslant 0$, $\left|\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.
Comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ par double limite, $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
Pour g, on a pour $x\in[1,+\infty[$, $\left|\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}\right|=\frac{1}{n!(x+n)}\leqslant\frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1,+\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
3. On calcule
$$\begin{aligned}f(x+1)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)}\\&=x\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)}=x\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)=xf(x)-1.\end{aligned}$$
Puis,
$$xg(x)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)}=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}-\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}\right)=\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}-\mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$
(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n=0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre <0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc
$$xg(x)=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)}=1+\mathrm{e}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)}=1+g(x+1).$$
4. On obtient alors pour tout x, $f(x)-g(x)=\frac{f(x+1)-g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$f(x)-g(x)=\frac{f(x+n)-g(x+n)}{x(x+1)...(x+n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
avec $f(t)-g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et $\frac{1}{x(x+1)...(x+n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (c'est la convergence simple de f).

5. Pour montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, on montre que $g(=f)$ l'est. On applique le théorème du cours : pour tout n, $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout k, $g_n^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+k}k!}{n!(x+n)^{k+1}}$. Pour montrer la convergence uniforme, on applique le TSSA sur une segment $[a,b]$ ne contenant pas d'entiers négatifs à partir d'un certain rang : $\left(\dfrac{k!}{n!(x+n)^{k+1}}\right)_{n\geqslant N}$ avec $N=\max(0,\lceil -b\rceil)$ (pour avoir $x+n>0$) décroît vers 0.

   Alors, en notant R_n^k le reste d'ordre n, $\left|R_n^k\right| \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|x+n+1|^{k+1}} \leqslant \dfrac{k!}{(n+1)!|a+n+1|^{k+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n\to+\infty$, donc il y a convergence uniforme de toutes les séries de dérivées et le théorème du cours s'applique.

14

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : x\in\mathbb{R}^+ \mapsto \operatorname{Arctan}(x+n)-\operatorname{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

   On pourra penser au théorème des accroissements finis.

2. Montrer que $S(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Solution de 14 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis ou une écriture sous forme intégrale. CN sur tout segment.
2. Justifier qu'une limite finie ou non existe et la minorer par une somme partielle (comme pour ζ en 1...) Ou utiliser une écriture de f_n sous forme intégrale.