Régularité des suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercices vus en cours

1 CCINP 10

2 CCINP 48 $C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $\left(P_n f\right)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Autres exercices

3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^p(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Démontrer que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $p > \alpha$.
3. Déterminer le limite pour $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 x^5\left(1+n^4\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

Séries de fonctions

- **Continuité, classe** : on utilise les théorèmes de transfert par convergence uniforme (sur tout segment).
- **Limites, équivalents** : penser au théorème de la double limite (attention, aux bornes de l'intervalle, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas.) S'il ne s'applique pas, on peut penser à une comparaison avec une intégrale.
  Pour les équivalents, c'est plus compliqué. On peut penser à la comparaison avec une intégrale, ou à sortir certains termes de la somme...
- **Intégration sur un segment** : il suffit d'avoir la convergence uniforme.
  Pour l'intégration sur des intervalles quelconques, nous verrons un théorème plus tard (convergence dominée).

Exercices vus en cours

4 CCINP 14

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

6 Montrer que $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ.

Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

7 CCINP 16

8 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer f' et étudier les variations de f.

Autres exercices

9 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-n}\cos\left(n^2 x\right)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leqslant 10^{-3}.$$

11 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Vérifier que sa somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

12
1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

13 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = \mathrm{e}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

14 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
   On pourra penser au théorème des accroissements finis.
2. Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.