## 1. Continuité

**10** ✦

1. Considérer $\sum f\left(\frac{k}{n}\right)$

## 2. Uniforme continuité

**12** ★ Pour $f : x \mapsto x\ln x$, faire un dessin.

Montrer la non UC au voisinage de $0$ en posant $x_n = \frac{1}{n} + h_n$ et $y_n = \frac{1}{n}$ où $h_n \to 0$ à déterminer en faisant une étude asymptotique de $f(x_n) - f(y_n)$...

**13** ★ Utiliser le théorème de Heine. Remarquer qu'il y a un problème de raccord entre deux périodes et se convaincre que le théorème de Heine doit être appliqué sur plus d'une période, par exemple sur $[0, 2T]$.

**14** ★ Combiner la définition de la limite et le théorème de Heine.

## 3. Dérivabilité

**17** ✦

1. Prolonger par continuité.
2. Utiliser les définitions/propriétés des limite pour se ramener au cas d'un segment. Ou (mieux!) : composer à gauche et/ou à droite par une fonction bien régulière (typiquement bijective de classe $\mathscr{C}^\infty$ et dont la réciproque l'est aussi) pour se ramener sur un segment quitte à prolonger par continuité.

**18** ✦ Obtenir la forme par récurrence.

Pour montrer que le polynôme est simplement scindé, appliquer beaucoup de fois le théorème de Rolle y compris sa version généralisée avec les limites en $\pm\infty$.

**19** ✦

1. Reprendre la démonstration du théorème de Rolle. Montrer par exemple si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$ qu'un maximum local est atteint sur $]a, b[$ et conclure avec la condition nécessaire d'extremum local.
2. prendre $m$ tel que $f'(a) < m < f'(b)$. Poser une fonction $g$ pour que cela se traduise par $g'(a) > 0$ et $g'(b) < 0$ et utiliser la question précédente.

**20** ✦ S'inspirer de la démonstration du TAF.

**21** ★ S'inspirer de la démonstration du TAF.

**22** ✦

1. Croissances comparées, application répétées du théorème de la limite de la dérivée.



## 4. Fonctions convexes

**26**

1. Utiliser la définition
2. Utiliser la question précédente

**27** ✦ Vérifier que $((1-t)f(x) + tf(y))((1-t)g(x) + tg(y)) \leqslant (1-t)f(x)g(x) + tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

**28** Utiliser la définition

**29** Introduire $f : x \mapsto x^{n+1}$ et une de ses tangentes.

**30** Utiliser $\ln \circ \ln$.

**31** Convexité de $g : x \mapsto x^2 - 2f(x)$

**32** ★ Noter $\theta_k$ les angles au centre et montrer que le périmètre vaut $\sum_{k=1}^{n} 2R\sin\theta_k$

**33** ✦

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**34** ✦ Convexité de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

**35** ★ Sinon, si on a $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$ et $z > x$, utiliser la croissante du taux d'accroissement $\tau_x$ entre $y$ et $z$ pour aboutir à une contradiction. L'autre cas se traite de manière analogue.

**36** ★ Croissance d'un taux d'accroissement quelconque entre $1$ et $x > 1$...

**37** ★

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.
2. Remarquer que $\ell$ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant. et conclure par le théorème de la limite monotone.

## 5. Intégrales sur des segments

**38**

1. IPP
2. IPP et transformer $\sin^2$ et linéariser.
3. CV
4. CV
5. Direct
6. DES
7. Méthode classique
8. DES
9. $+\cdots-\cdots$ ou CV
10. CV
11. Direct ou Bioche
12. Bioche
13. CV
14. CV
15. CV
16. CV $\times 2$
17. Forme canonique et CV
18. Bioche
19. Bioche
20. CV

**40** Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$.

**41** Appliquer le TAF à $\ln(f)$

**42** Vérifier que $I_n \to 1$ puis faire une IPP dans cette majoration.

**44** **Lemme de Riemann-Lebesgue**

1. IPP
2. Théorème de Weierstraß
3. Théorème d'approximation uniforme par des fonctions en escalier

**45** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**49** Utiliser une somme de Riemann.

**51**

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre $x$ et $x+h$ et entre $x$ et $x-h$.
2. Déterminer le minimum de $\frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

**52**

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre $x$ et $a$ : (1)
   Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre $x$ et $b$ : (2)
   Éliminer les $f'(x)$ avec $(b-x)(1)+(x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

**53** Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre $3$.