1. Exercices traités en cours

1 Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ est discontinue toute en vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

2 Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

3 Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x \mapsto ax+b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), $|\cdot|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

4 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est $\frac{1}{2}$-hölderienne : c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant k\sqrt{|x-y|}.$$

En déduire l'uniforme continuité de $\sqrt{\cdot}$. Est-elle lipschitzienne ?

5 **CCINP 3 : Formule de Leibniz**

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Solution de 5 : CCINP 3 : Formule de Leibniz

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
   $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\,\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.

3. Notons (P_n) la propriété :
Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$ avec $\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0$.

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

6 CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Solution de 6 : CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
   Alors $\exists\, c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
2. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\dfrac{1}{h}\big(f(x_0 + h) - f(x_0)\big) = f'(c_h) \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x) = \ell$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   g est également dérivable en 0 car $\dfrac{1}{h}(g(h) - g(0)) = h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
   Or $h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ car $\left|h \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right| \leqslant |h|$. Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   $2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (car $\left|2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

2. Continuité

7 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

8 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

9 Un coureur parcourt 42 km en 4 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il parcourt exactement 21 km.

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

10 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy**

Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0, 1]$, la fonction $f : x \mapsto \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\dfrac{\pi}{T}\right)$ où $T > 0$, montrer qu'on peut avoir $f(0) = f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x) = f(x + T)$.

11 Soit $[a, b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

3. Uniforme continuité

12 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}_*^+$ de $\ln$ et $x \mapsto x \ln x$.

Solution de 12 :

$\ln$ présente un problème d'uniforme continuité au voisinage de 0 (asymptote verticale). On peut utiliser des suites. L'avantage ici, est que $\ln(x_n) - \ln(x'_n)$ se réécrit, se qui permet de trouver facilement des suites (x_n) et (x'_n) tendant vers 0 contredisant l'uniforme continuité.

Pour $f : x \mapsto x \ln x$ commencer par tracer la courbe (ça fait réviser les études de fonctions) et se rendre compte que la branche parabolique au voisinage de $+\infty$ risque de poser problème.

Chercher des suites au voisinage de $+\infty$, par exemple, $x_n = n$ et $x'_n = n + h_n$ où on cherche $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tel que $f(x'_n) - f(x_n) \not\to 0$ ce qui se trouve en faisant un développement asymptotique...

13 Montrer qu'une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

Solution de 13 :

Pas de miracle ici, il faut sortir les ε.

Traduire l'uniforme continuité sur une seule période ne suffit pas il y des problèmes de raccord (cas de deux points, l'un se ramenant au début de la période et l'autre à la fin) : il faut le faire sur un intervalle de deux périodes, puis se ramener dans cet intervalle.

14 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Solution de 14 :

Sortir les ε.
Au voisinage de $+\infty$, les variations sont contraintes par la convergence.
Ailleurs, on est sur un segment donc cela se passe bien.
Reste à gérer le raccord...

4. Dérivabilité

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a, b[$.

15 **Très classique (jusqu'à 4.)**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est simplement scindé.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. **Oral X**
   (a) Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $aP + bP'$ est scindé.
   (b) Montrer que si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, $\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)}$ est scindé.
   Indication : utiliser l'endomorphisme $P(D)$ où D est l'endomorphisme de dérivation.

Solution de 15 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. (a) Le résultat est immédiat si $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b = 1$ (quitte à tout diviser par b).
Si P est scindé, il s'écrit $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{m_k}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité $m_k - 1$, ce qui donne $\deg P - n$ racines de $aP + P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n.

L'idée astucieuse est de considérer $f : x \mapsto P(x)e^{ax}$ qui se dérive en $f' : x \mapsto (P'(x) + aP(x))e^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P' + aP$.

Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P' + aP$ qui est bien scindé.

Ensuite, pour (b), question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...
On a
$$\sum_{k=0}^{d} a_k P^{(k)} = [P(D)](P)$$
Mais $P = \lambda \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc
$$[P(D)](P) = \lambda (D - \alpha_q Id) \circ \cdots \circ (D - \alpha_1 Id)(P)$$
Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \geqslant 1$,
$$[(D - \alpha_q Id) \circ \cdots \circ (D - \alpha_1 Id)](P)$$
est scindé...

16

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

Solution de 16 :

Applications itérées du théorème de Rolle, en remarquant que 1 et -1 sont racines d'ordre n de $(X^2-1)^n$.

17 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

18 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\operatorname{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale simplement scindée.

Solution de 18 : Dérivées successives d'arctangente

Utiliser une récurrence puis une généralisation du théorème de Rolle.

19 Théorème de Darboux

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Solution de 19 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a)>0$ et $f(a)<0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en distant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a,b]$ est atteint dans $]a,b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b.

   Cependant, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a)>0$ donc au voisinage de a, $f(x)-f(a)>0$ soit $f(x)>f(a)$ et de même, au voisinage de b, $f(x)>f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a,b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.
2. Si, plus généralement, f dérivable sur I, $a,b \in I$ distincts et m tel que $f'(a)<m<f'(b)$, alors $g = f - m\,\mathrm{id}$ est dérivable sur $[a,b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a,b[$.

20 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b \in I$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Solution de 20 : Égalité de Taylor-Lagrange

Poser $\varphi(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1} \right)$ avec A tel que $\varphi(a)=0$ et appliquer le théorème de Rolle puis conclure.

Ou bien poser $\varphi(x)=f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+A(x-a)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(b)=0$ et soit appliquer le théorème de Rolle puis une hypothèse de récurrence, soit n fois le théorème de Rolle.

21 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0=a, x_1, \ldots, x_n=b)$.

1. Montrer que
$$\forall\, x\in[a,b],\ \ \exists\,\xi_x\in[a,b],\ \ f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x).$$
Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.
2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,
$$\left\|f-P_n\right\|_\infty\leqslant\frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\left\|T\right\|_\infty.$$

Solution de 21 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x\in[a,b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi\ :\ t\mapsto f(t)-P_n(t)-K\,T(t)$ où K est tel que $\varphi(x)=0$ (ce qui est possible car $T(x)\neq 0$ car x n'est pas l'un des x_i.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a,b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j\in[\![0,n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0,n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x\in]a,b[$.

Or $\varphi^{(n+1)}=f^{(n+1)}-P_n^{(n+1)}-K\,T^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}-K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}T(x).}$

22 Fonctions plateau de classe $\mathscr{C}^\infty$

Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. **Très classique :** On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^{e} est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x\leqslant 0$, $\phi(x)=0$.
Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x\mapsto\phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a<c<d<b$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

5. Parties convexes

23 Enveloppe convexe

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.

Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?

Solution de 23 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A.

C'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

24 Points extrémaux

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :

$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad x \in [a,b] \Longrightarrow \left(x = a \quad \text{ou} \quad x = b\right)$$

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n \geqslant 2$.

Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.

Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

Solution de 24 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

25 Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\dfrac{P'}{P}$.

Solution de 25 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$0 = \sum \lambda_k (z - x_k)$ avec $\lambda_k = \dfrac{1}{|z - x_k|^2}$.

6. Fonctions convexes

26

1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec $\ln$ (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

Solution de 26 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

27 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

Solution de 27 :
Vérifier que $((1-t)f(x)+tf(y))((1-t)g(x)+tg(y)) \leqslant (1-t)f(x)g(x)+tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

28 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Solution de 28 :
Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

29 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \geqslant 0,\ \ x^{n+1}-(n+1)x+n \geqslant 0.$

Solution de 29 : Inégalité de Bernoulli
$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y=(n+1)(x-1)+1$.

30 Montrer que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Solution de 30 :
Concavité de $\ln \circ \ln$.

31 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que

$$f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Solution de 31 :
Convexité de $g : x \mapsto x^2-2f(x)$ appliquée en $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 0+\dfrac{1}{2}\cdot 1$.

32 Montrer que parmi les polygones convexes inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

Solution de 32 :
En notant θ_k les angles au centre, pour un n-gone inscrit dans un cercle de rayon R, le périmètre est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2R\sin\theta_k$ avec $\sin$ concave sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

33 Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP - Écrit Centrale)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a<b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) + (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x = f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi : x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 33 : Inégalité de Jensen continue (Oral CCINP - Écrit Centrale)

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,
$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$
Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,
$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t$,
ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »...On conclut donc.
2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a,b]$,
$$\phi\big(f(t)\big) \geqslant \phi(\gamma) + \big(f(t)-\gamma\big)\phi'(\gamma)$$
On intègre entre a et b ($a<b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne
$$\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t \geqslant (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$
En particulier, prenons $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\big(f(t)\big)\mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

ou encore

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

34 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ \ 1+\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}.$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution de 34 :

Convexité de $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

35 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. (*On pourra raisonner par l'absurde.*) Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

Solution de 35 :

Sinon, si on a $x<y$ tels que $f(x)<f(y)$. Si $z>y$, $\tau_x(y) \leqslant \tau_x(z)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x<y$ tels que $f(x)>f(y)$. Si $z<x$, $\tau_x(z) \leqslant \tau_x(y)$ donne $f(z) \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

36 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Solution de 36 :

Si $x>1$, $\tau_0(1) \leqslant \tau_0(x)$ donne $f(x) \geqslant (f(1)-f(0))x + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

37 **Branche infinie d'une fonction convexe** Soit $f\,:\,\mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto f(x)-\ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.

Solution de 37 : Branche infinie d'une fonction convexe

1. Utiliser la croissance d'une fonction taux d'accroissement en un point quelconque.
   $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x-1}{x}\tau_1(x) + \dfrac{1}{x}$ qui a une limite finie ou $+\infty$ par théorème de la limite monotone.
2. Remarquer que ℓ est aussi la limite de tout taux d'accroissement qui est croissant.
   Si $x \leqslant y$, $\tau_x(y) \leqslant \ell$ donne $f(y)-\ell y \leqslant f(x)-\ell x$ et conclure par le théorème de la limite monotone dans le cas décroissant.

7. Intégrales sur des segments

A. Calculs de primitives et d'intégrales

38 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t+t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2\pm 2t+2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{e^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}$

Solution de 38 :

Indication :

1. IPP
2. IPP et transformer $\sin^2$ et linéariser.
3. CV
4. CV
5. Direct
6. DES
7. Méthode classique
8. DES
9. $+\cdots-\cdots$ ou CV

Réponses :

1. $t\,\mathrm{sh}\,t-\mathrm{e}^{-t}+C$ $(\mathbb{R})$
2. $\dfrac{1}{3}t\cos^3 t-t\cos t+\dfrac{2}{3}\sin t+\dfrac{1}{9}\sin^3 t+C$ $(\mathbb{R})$
3. $2\operatorname{Arctan}\sqrt{t}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
4. $\dfrac{\ln(1+\ln^2 t)}{2}+C$ $(\mathbb{R}_*^+)$
5. $\dfrac{\operatorname{Arctan} t^6}{6}+C$ $(\mathbb{R})$
6. $\dfrac{\ln\left|t^2-1\right|-2\ln|t|}{2}+C_k$ $(I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,0[$ ou $I_3=]0,1[$ ou $I_4=]1,+\infty[)$
7. $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+2t+2)-\operatorname{Arctan}(t+1)+C$ (R) et $\operatorname{Arctan}(t-1)+C$ $(\mathbb{R})$
8. $t+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|-\operatorname{Arctan} t+C_k$ sur $I_1=]-\infty,-1[$ ou $I_2=]-1,1[$ ou $I_3=]1,+\infty[$
9. $t-\ln\left(\mathrm{e}^t+1\right)$
10. $t-\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{e}^{2t}+1\right)$

39 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi}\sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t}$
7. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{t}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

B. Manipulations d'intégrales

40 Soit $f\in\mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution de 40 :

Intégrer $g: t\mapsto f(t)-t$.

41 Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

Solution de 41 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x,x+1]$.

Réponse : e^α.

42 Montrer que $(I_n)_n=\left(\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n-\ell$.

Solution de 42 :

Vérifier que $I_n\to 1$ (intuitif) en majorant $|I_n-1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $-\dfrac{\ln 2}{n}$.

43 Intégrales de Wallis

On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2} \sim I_n$ puis que $I_{n-1} \sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

44 Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. On veut montrer que $\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Montrer le résultat pour f continue en utilisant des fonctions polynomiales.
3. Montrer le résultat si f en escalier, puis continue par morceaux.

On peut remplacer $\sin(nt)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* e^{int}.

45

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles, telle que $f(a)=0$.

1. Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, $(f(t))^2 \leqslant (t-a)\int_a^t \left(f'(u)\right)^2 \mathrm{d}u$.
2. En déduire que $\int_a^b (f(t))^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \left(f'(u)\right)^2 \mathrm{d}u$.

Solution de 45 :

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

C. Intégrale dépendant des bornes

46

Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x) = \int_{1/x}^x \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$. Calculer $I(x)$ pour $x>0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t=\frac{1}{u}$ 2. Intégration par parties 3. Étude de la fonction I

47

Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0)=1$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.

2. Justifier que f et dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

D. Sommes de Riemann

48 Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$
6. $\displaystyle\left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

49 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}$.

Solution de 49 :
Utiliser une somme de Riemann.

50 **Oral Centrale** On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{z-e^{it}}\,dt$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.
   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = e^{it}$. Qu'en penser ?

E. Formules de Taylor

51 Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall\, h > 0,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.
2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Solution de 51 :

1. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale ou bien l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$.
2. Déterminer le minimum de $\frac{M_0}{h}+\frac{M_2 h}{2}$ à l'aide d'une étude de fonction.

52 Soit $(a,b)\in R^2$ tel que $a<b$. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Justifier l'existence de $M=\sup_{[a,b]}\left|f''\right|$.
2. Soit $x\in[a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)|\leqslant\frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{12}$.

Solution de 52 :

1. Continuité sur un segment.
2. Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et a : (1)
   Appliquer la formule de Taylor reste intégrale entre x et b : (2)
   Éliminer les $f'(x)$ avec $(b-x)(1)+(x-a)(2)$, puis majorer en valeur absolue.
3. Pas de difficulté.

53 Soit $a\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[a-r,a+r]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\frac{1}{h^3}\big(f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)\big)$ lorsque $h\to 0$.

Solution de 53 :
Appliquer trois fois la formule de Taylor-Young à l'ordre 3.
Réponse : $f'''(a)$.